Analyse fréquentielle des circuits linéaires: Régime Harmonique (ou sinusoïdal) à l'èquilibre

Electronique I

Adil KOUKAB Adil

EPFL

Sommaire

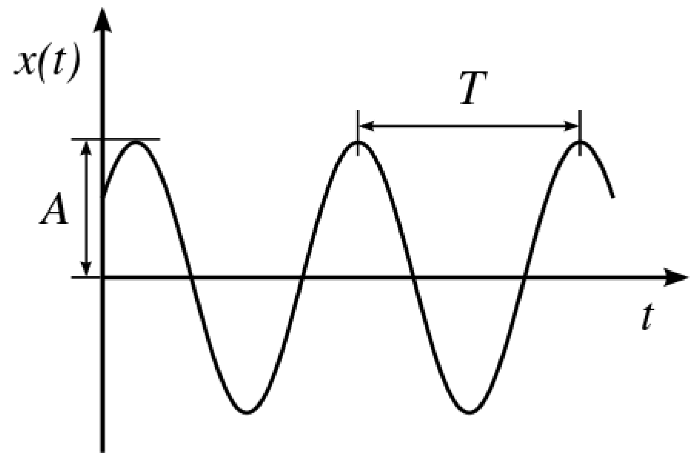
- Signal sinusoïdal et ses différentes représentation
- RLC: Impédances complexes et Loi d'Ohm généralisée
- Généralisation: signaux analogiques quelconques
  - Exemple: Signal audio, ECG
- Utilisation des phraseurs pour l'analyse de circuits

Rappel

- Fonction de transfert d'un système linéaire
- Représentation asymptotique: Diagramme de Bode en amplitude et en phase
- Applications: Circuits RC passe-haut et passe-bas de premier ordre

Signaux Analogiques

- Def: Signaux Analogiques ≡ continus en temps et en amplitude
- Ex: Signal sinusoïdal: $x(t) = A\cos(\omega_o t + \varphi)$ avec
- A: l'amplitude [V] ou [A],
- φ: la phase [rad ou deg]
- ω_o: la pulsation ou vitesse de rotation [rad/s].



$$\omega_o = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_o$$

avec T la période [s] et f_o fréquence [Hz]

Représentation Complexe et Phaseur

Leonhard Euler (1707-1783)
mathématicien Suisse

- On associe à $x(t) = A\cos(\omega_o t + \varphi)$ une grandeur complexe

- $$\underline{x}(t) = \underbrace{Ae^{j(\omega_o t + \varphi)}}_{rep.\,Polaire} = \underbrace{Ae^{j(\varphi)}}_{Phaseur:\mathbf{X}} \; e^{j(\omega_o t)} = \mathbf{X}e^{j(\omega_o t)}$$

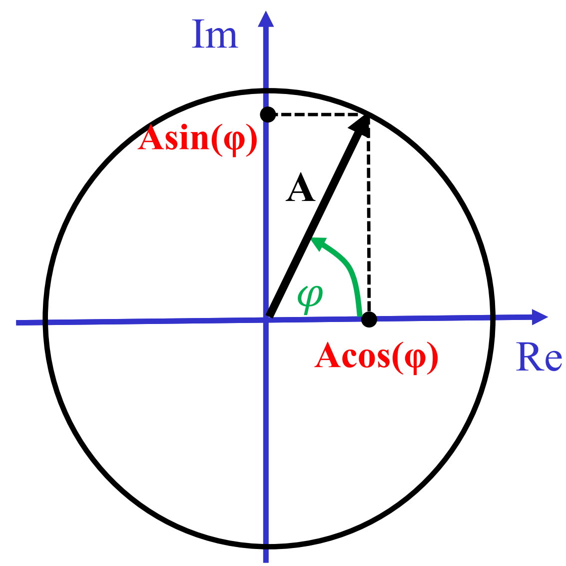
$$= \underbrace{A\big(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)\big)}_{Phaseur\ en\ rep.\,rectangulaire} \quad e^{j(\omega_o t)}$$

Phaseur: $\mathbf{X} = Ae^{j(\varphi)} = A\angle\varphi$

- Module: $\mathbf{A} = |\underline{\mathbf{x}}(\mathbf{t})| = |\mathbf{X}|$
- Phase: Argument de X: $\varphi = \arg(\mathbf{X})$

$$= \operatorname{arctg}\left({}^{\mathrm{Im}(\mathbf{X}))}\!/_{\mathrm{Re}(\mathbf{X})}\right)$$

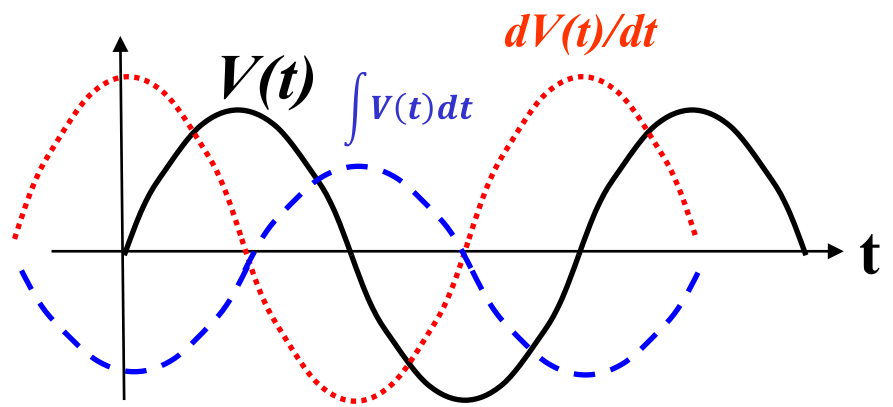
$$x(t) = Re\left\{\underline{x}\,(t) = \mathbf{X}e^{j(\omega_o t)}\right\}$$



Représentation vectorielle

Représentation complexe/phaseur: Dérivée te Intégral

- **La représentation complexe permet une simplification significative des calculs** (Calculs trigonométriques, dérivation, intégrale et donc équations différentielles se transforment en calculs algébriques simples).
- Ex: soit le signal $\underline{\mathbf{V}}(\mathbf{t}) = V_m e^{j(\omega t+\varphi)} = \mathbf{V} e^{j\omega t}$ avec $\mathbf{V} = V_m \angle \varphi$



- $\frac{d}{dt}\underline{V} = j\omega \underline{V} = \underbrace{j\omega \overbrace{V_m e^{j\varphi}}^{\mathrm{V}}}_{\mathrm{V}'} e^{j\omega t} = \mathrm{V}' e^{j\omega t}$

  avec $\mathrm{V}' = \mathbf{j\omega V} = \omega V_m \angle \varphi + 90°$

- $\int \underline{V} dt = \frac{1}{j\omega}\underline{V} = \underbrace{\frac{1}{j\omega} \overbrace{V_m e^{j\varphi}}^{\mathrm{V}}}_{\mathrm{V}''} e^{j\omega t} = \mathrm{V}'' e^{j\omega t}$

  avec $\mathrm{V}'' = \frac{1}{j\omega}\mathbf{V} = \frac{V_m}{\omega} \angle \varphi - 90°$

> ➢ En résumé:
> **Dérivée ≡ ×jω (≡ × ω et déphasage de 90°)**
> **Intégration ≡ $\times\frac{-j}{\omega}$ (≡ × ω^{-1} et déphasage de -90°)**

Représentation complexe/phaseur: Combinaison Linéaire

- **Combinaison linéaire (Superposition + proportionnalité) de signaux de même fréquence, Ex:**
  - $\underline{V}(t) = A.\,\underline{V_1}(t) + B.\,\underline{V_2}(t) = A\;\underbrace{\mathbf{V_1}}_{V_{m1}\angle\varphi_1}\;e^{j\omega t} + B\;\underbrace{\mathbf{V_2}}_{V_{m2}\angle\varphi_2}\;e^{j\omega t}$

$$\rightarrow \underline{V}(t) = \mathbf{V}e^{j\omega t} \text{ avec } \mathbf{V} = A.\mathbf{V_1} + B.\mathbf{V_2}$$

- En résumé, Une combinaison linéaire de sinusoïdes de même fréquence équivaut à la combinaison linéaire de leurs phaseurs.
- Puisque les lois de Kirchhoff aboutissent à des combinaisons linéaires de sinusoïdes, on peut les appliquer directement aux phaseurs pour trouver l'amplitude et la phase de m'importe quel signale $x(t)$ du circuit et écrire: $x(t) = Re\left\{\underline{x}\,(t) = \mathbf{X}e^{j(\omega_o t)}\right\}$

Éléments passifs linéaires en régime harmonique

Résistance

$$\underline{U} = R\,\underline{I}(t)$$

Capacité

$$\underline{I}(t) = C\,\frac{d\underline{U}}{dt}$$

Inductance

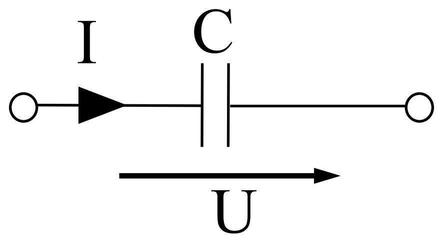
$$\underline{U}(t) = L\,\frac{d\underline{I}}{dt}$$

Impédances complexes et Loi d'Ohm généralisée

- **Intérêt: Généralisation de la loi d'Ohm "$\underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I}$" pour C et L**

- **Condensateur**

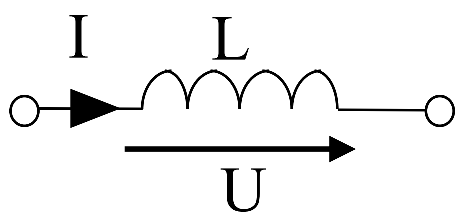
$$\underline{I}(t) = C\,\frac{d\underline{U}}{dt} = (j\omega C)\,\underline{U} \rightarrow \underline{U} = \underline{Z_c} \times \underline{I} \text{ ou } \overbrace{U = Z_c\, I}^{\text{phaseur}}$$



Avec l'impédance complexe ou réactance $\underline{Z_c} = \underline{X_c} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} = \frac{1}{j\omega C}$

- **Inductance**

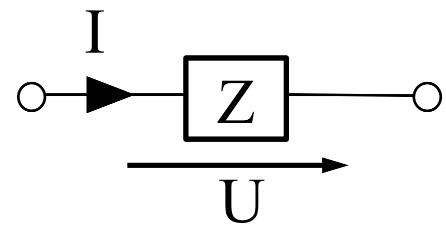
$$\underline{U}(t) = L\,\frac{d\underline{I}}{dt} = (j\omega L)\,\underline{I} \rightarrow \underline{U} = \underline{Z_L} \times \underline{I} \text{ ou } \overbrace{U = Z_L\, I}^{\text{phaseur}}$$



Avec l'impédance complexe ou réactance $\underline{Z_L} = \underline{X_L} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} = j\omega L$

Loi d'Ohm généralisée

En régime harmonique : $\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{I}}\,\underline{\mathbf{Z}}$ **ou** $\underline{\mathbf{I}} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}}$

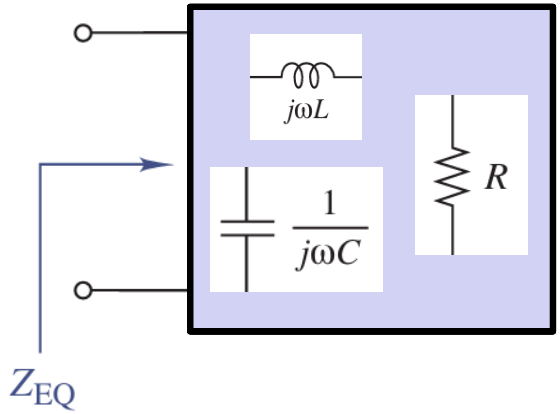


- $Z_R = R$ — RESISTANCE
- $\underline{Z}_{\underline{c}} = \underline{X}_{\underline{c}} = \dfrac{1}{j\omega C}$ — CONDENSATEUR
- $\underline{Z}_{\underline{L}} = \underline{X}_{\underline{L}} = j\omega L$ — INDUCTANCE

Connexions

- **Série :** $\mathbf{Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n}$
- **Parallèle:** $\mathbf{1/Z_{eq} = 1/Z_1 + 1/Z_2 + \ldots + 1/Z_n}$

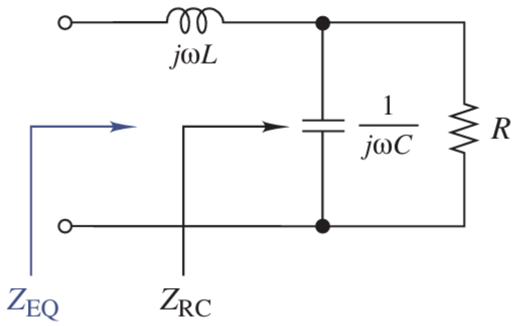
Fréquence de résonance



- **L'impédance équivalente observée entre deux bornes d'un circuit peut toujours être écrite sous la forme complexe $Z_{EQ} = R_{EQ} + jX_{EQ}$, avec R_{EQ} toujours positif (résistance) et X_{EQ} positive (X_L inductance) ou négative (X_c capacité).**
- **Lorsqu'à une certaine fréquence ω_0, l'impédance Z_{EQ} est purement résistive c.à.d. $X_{EQ} = 0$, le circuit est dit en résonance. La fréquence à laquelle cela se produit, ω_0, est appelée fréquence de résonance.**

Exercice 1:

Donner l'expression théorique de ω_o qui mettra le circuit en résonance. Donner sa valeur pour R = 1 kΩ, L = 200 mH et C = 1 µF.



➢ $\underline{Z}_{EQ} = R_{EQ} + j\underline{X}_{EQ} = j\omega L + \underline{Z}_{RC}$

avec $\underline{Z}_{RC} = \underline{Z}_C // R = \frac{R\,{}^{1}/_{j\omega C}}{R + {}^{1}/_{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$

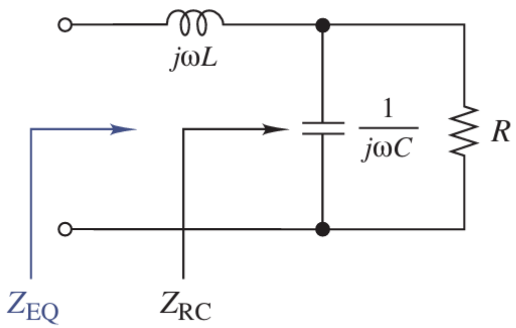
→ $\underline{Z}_{EQ} = j\omega L + \frac{R}{1+j\omega RC} = \frac{j\omega L(1+(\omega RC)^2) + R(1-j\omega RC)}{1+(\omega RC)^2} = \frac{R}{1+(\omega RC)^2} + j\left[\omega L - \frac{j\omega R^2 C}{1+(\omega RC)^2}\right]$

$$X_{EQ}(j\omega_o) = 0 \Rightarrow L\left(1 + (\omega_0 RC)^2\right) - R^2C = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\sqrt{R^2CL^{-1} - 1}}{RC} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(RC)^2}}$$

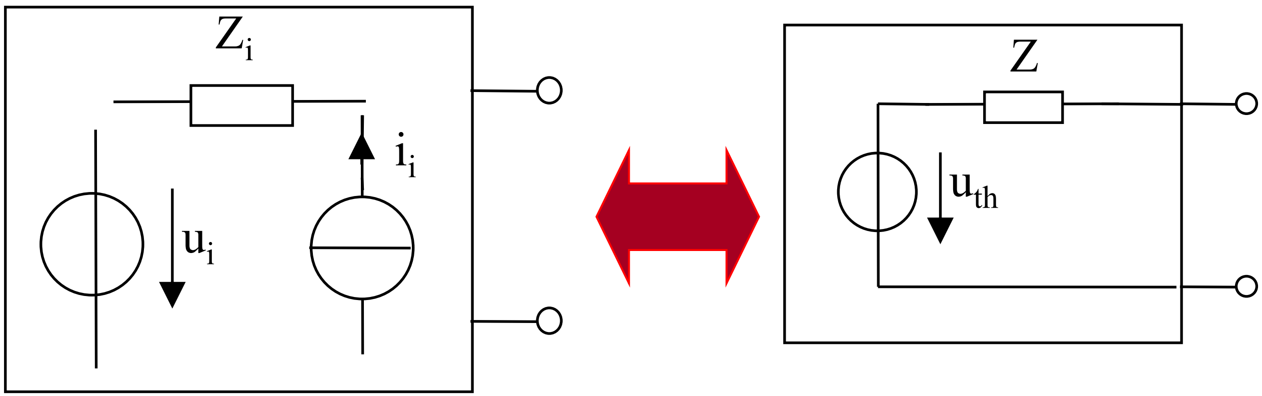
Noter que la réactance $X_{EQ}(\omega)$ est une fonction croissante. Elle est donc capacitive (négative) lorsque $\omega < \omega_o$ et inductive (positive) lorsque $\omega > \omega_o$.

Solution:

Expression théorique de ω_o qui mettra le circuit en résonance.

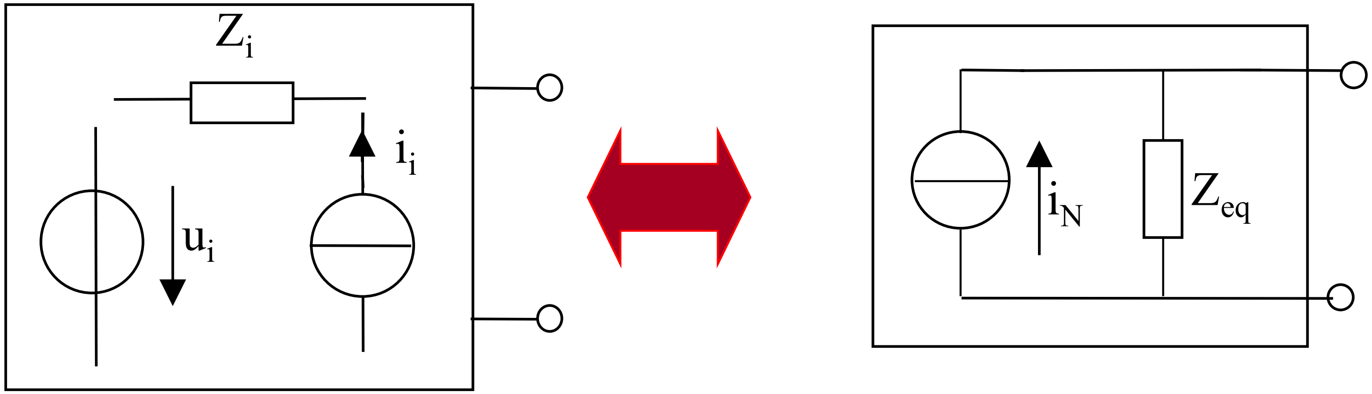


Théorème de Thévenin



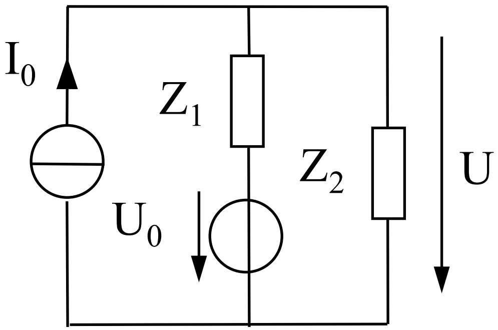
- u_{th}= tension à vide
- Z_{eq} = Impédance vue entre les 2 bornes lorsque toutes les sources indépendantes sont annulées.
- Annulation d'une source de tension = court-circuit
- Annulation d'une source de courant = circuit ouvert
- Les sources dépendantes doivent être maintenues

Théorème de Norton



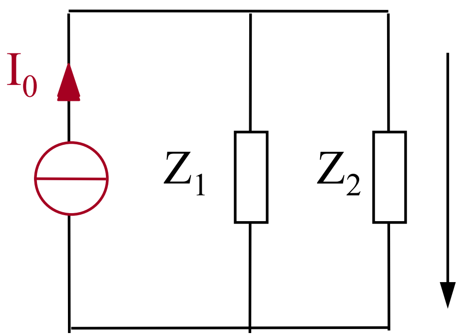
- i_N = courant de court-circuit
- Z_{eq} = Impédance vue entre les 2 bornes lorsque toutes les sources indépendantes sont annulées (identique à Thévenin)
- Les sources dépendantes doivent être maintenues.
- Equivalence Thévenin Norton: $V_{th} = i_N Z_{eq}$

Principe de Superposition



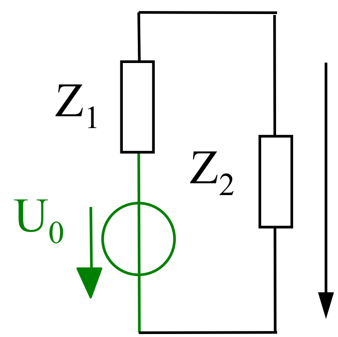
- Valable que pour tous système linéaire
- Toutes les sources dépendantes doivent être maintenues à chaque opération

Contribution de la source de courant I_0



$$U_1 = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} I_0$$

Contribution de la source de tension U_0



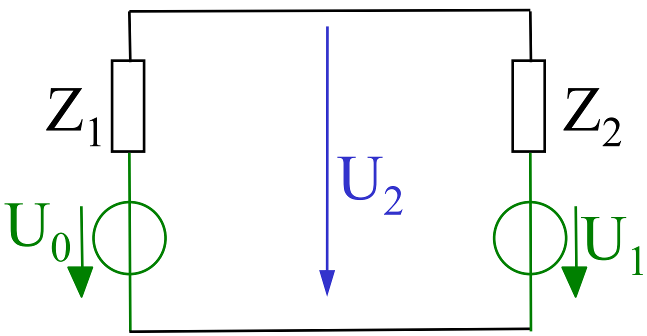
$$U_2 = \frac{z_2}{z_1 + z_2} U_0$$

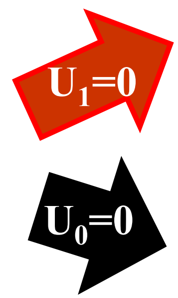
Superposition:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} I_0 + \frac{z_2}{z_1 + z_2} U_0$$

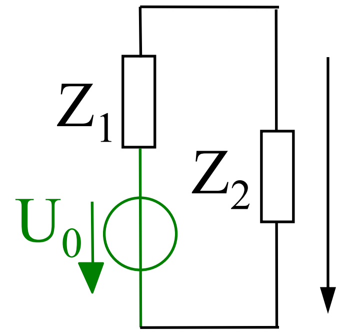
Diviseur de tension

Superposition

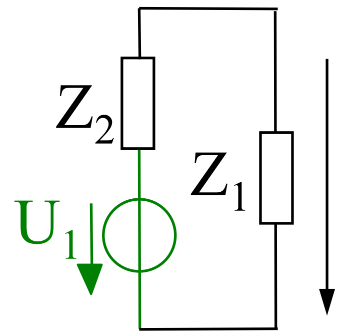




Diviseur de tension



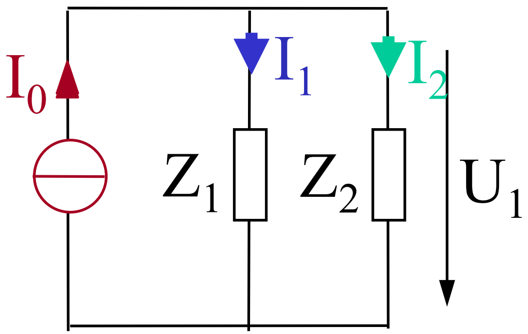
$$U_2' = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} U_0$$



$$U_2'' = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} U_0$$

et donc $U_2 = U_2' + U_2'' = \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2} U_0 + \dfrac{Z_1}{Z_1 + Z_2} U_1$

Diviseur de courant



$$U_1 = \frac{Z_2 Z_1}{Z_1 + Z_2} I_0 = Z_1 I_1 = Z_2 I_2$$

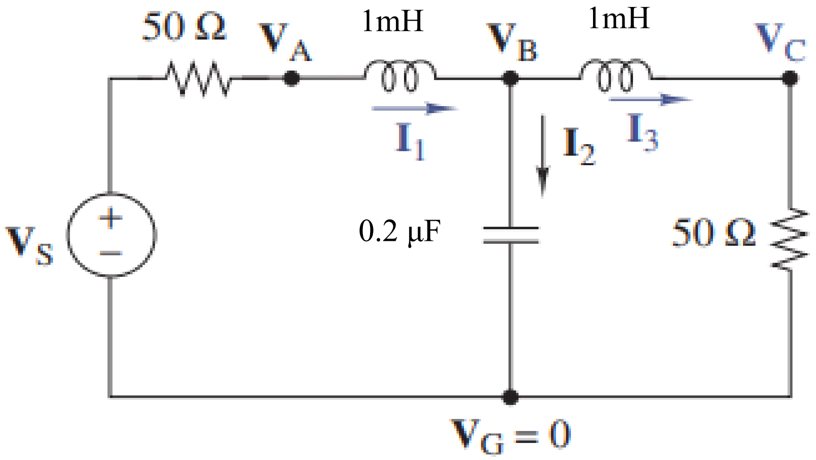
et donc

$$\boxed{I_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I_0}$$

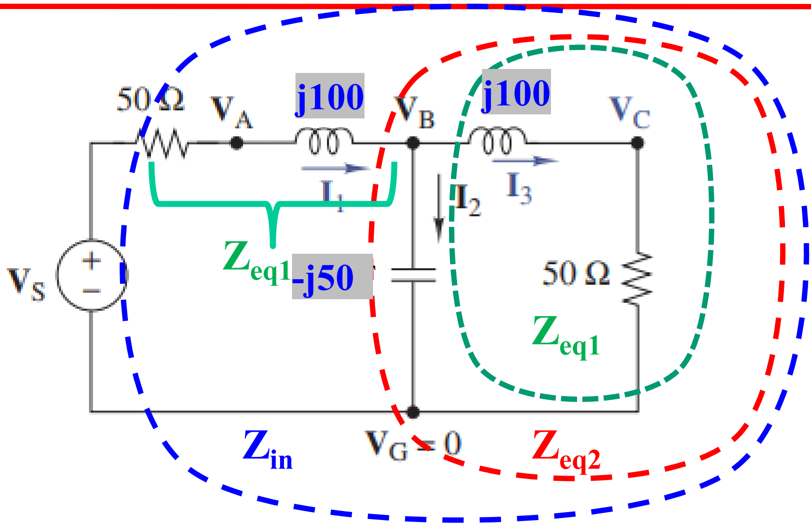
$$\boxed{I_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I_0}$$

Exercice 2:

Déterminer Zin l'impédance d'entré ainsi que tous les courants et tension du circuits pour un v_s =10 sin(10^5t)



Solution:



- $Z_{in} = \frac{V_s}{I_1} = \underline{Z_{eq1}} + \underline{Z_{eq2}}$

  avec $\underline{Z_{eq1}} = R + j\omega L = 50 + j100\ \Omega$

  $et\ \underline{Z_{eq2}} = \underline{Z_c} // \underline{Z_{eq1}} = 25 - j75\ \Omega$

  $\rightarrow Z_{in} = 75 + j\,25\ \Omega$

- $I_1 = \frac{V_s}{Z_{in}} = 0.12 - j\,0.04\ A\ = 126\ V\angle -18.4°$
- $V_B = \frac{Z_{eq2}}{Z_{in}} V_s\ = -\,j\,10\ V\ = 10\ V\angle -90°$
- $I_2 = \frac{V_B}{Z_c}\ = 0.2A\ = 0.2\ A\angle 0°$
- $I_3 = I_1 - I_3 = 0.08 - j\,0.04\ A = \ 0.089A\angle -153°$
- $V_C = I_3 R\ = -4 - 2j\ V = 4.47\ V\angle -153°$

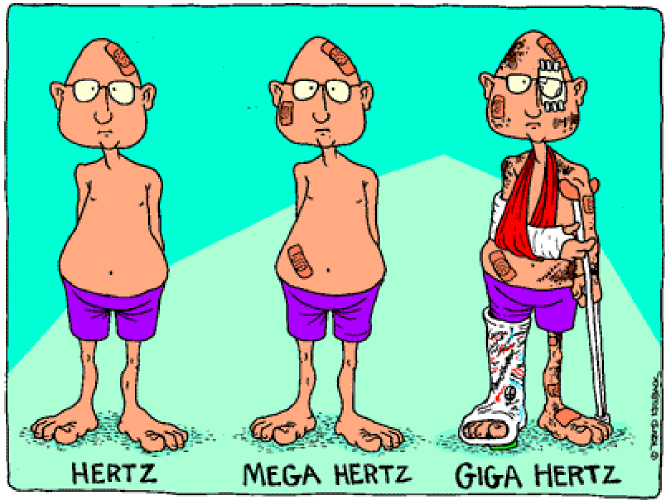
Analyse fréquentielle des circuits linéaires

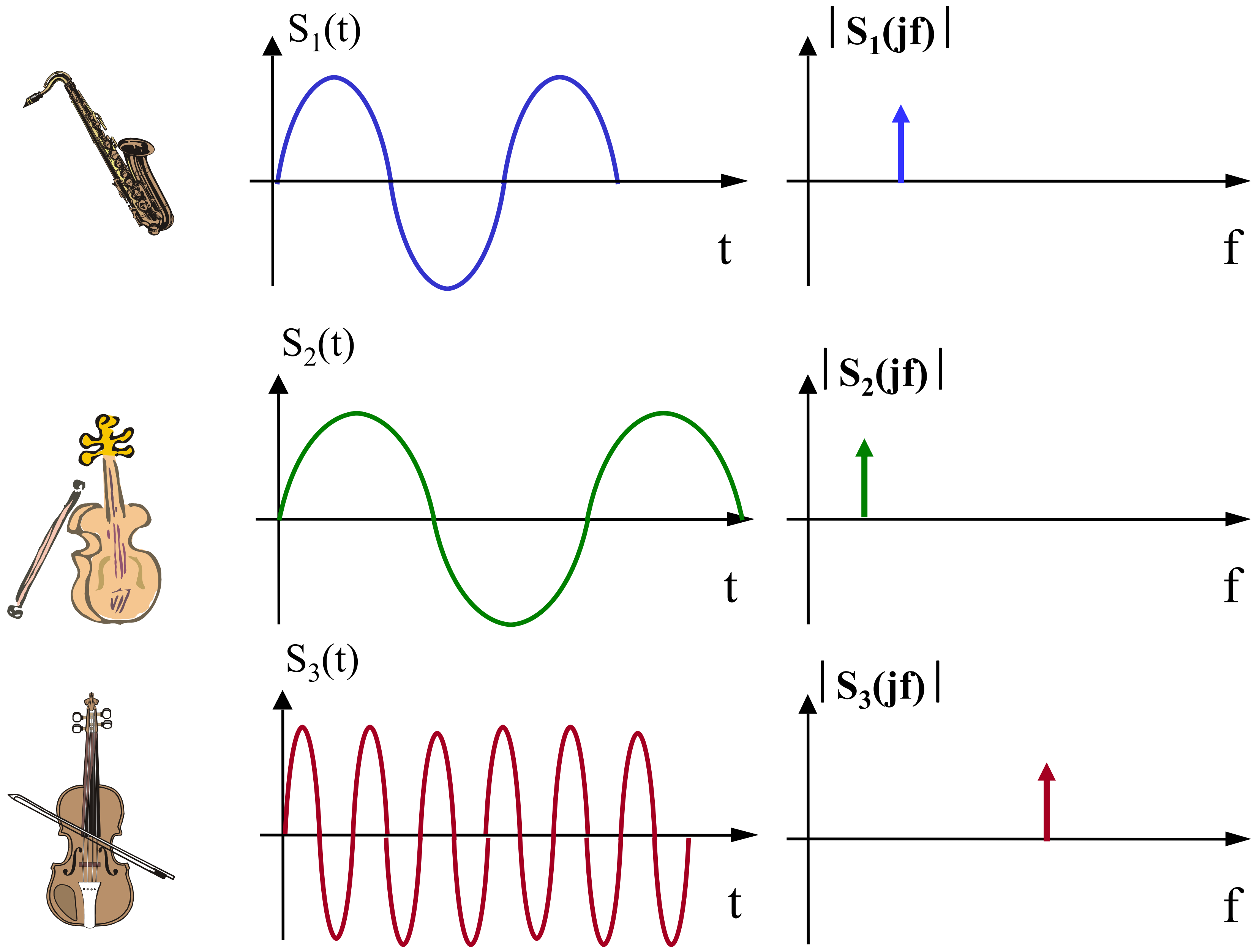
L'*analyse fréquentielle* ou *réponse en fréquence*

correspond à

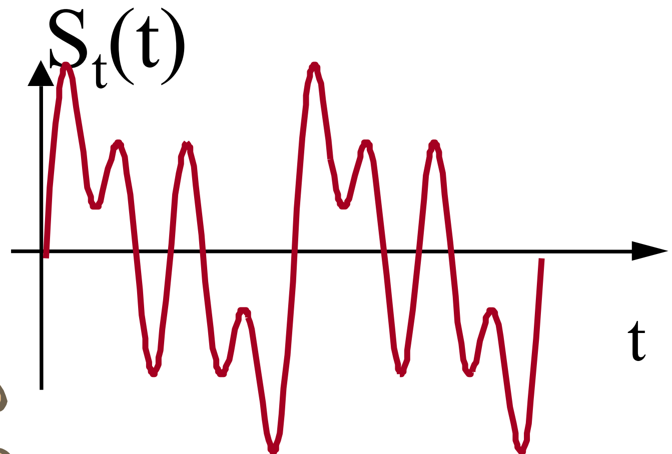
l'analyse harmonique pour toutes les fréquences

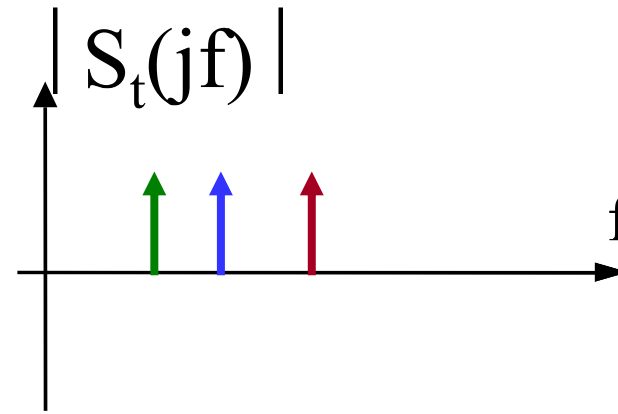
(ou pulsations $\omega = 2\pi f$)





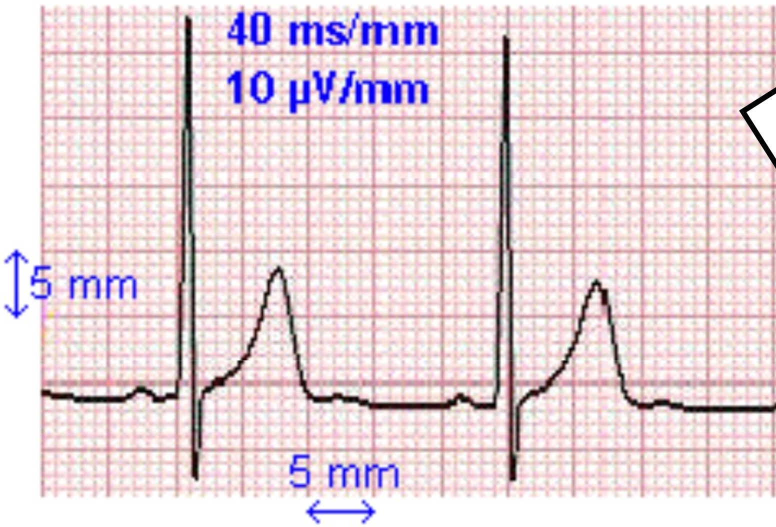
$S_1(t)$
t
$|S_1(jf)|$
f
$S_2(t)$
t
$|S_2(jf)|$
f
$S_3(t)$
t
$|S_3(jf)|$
f

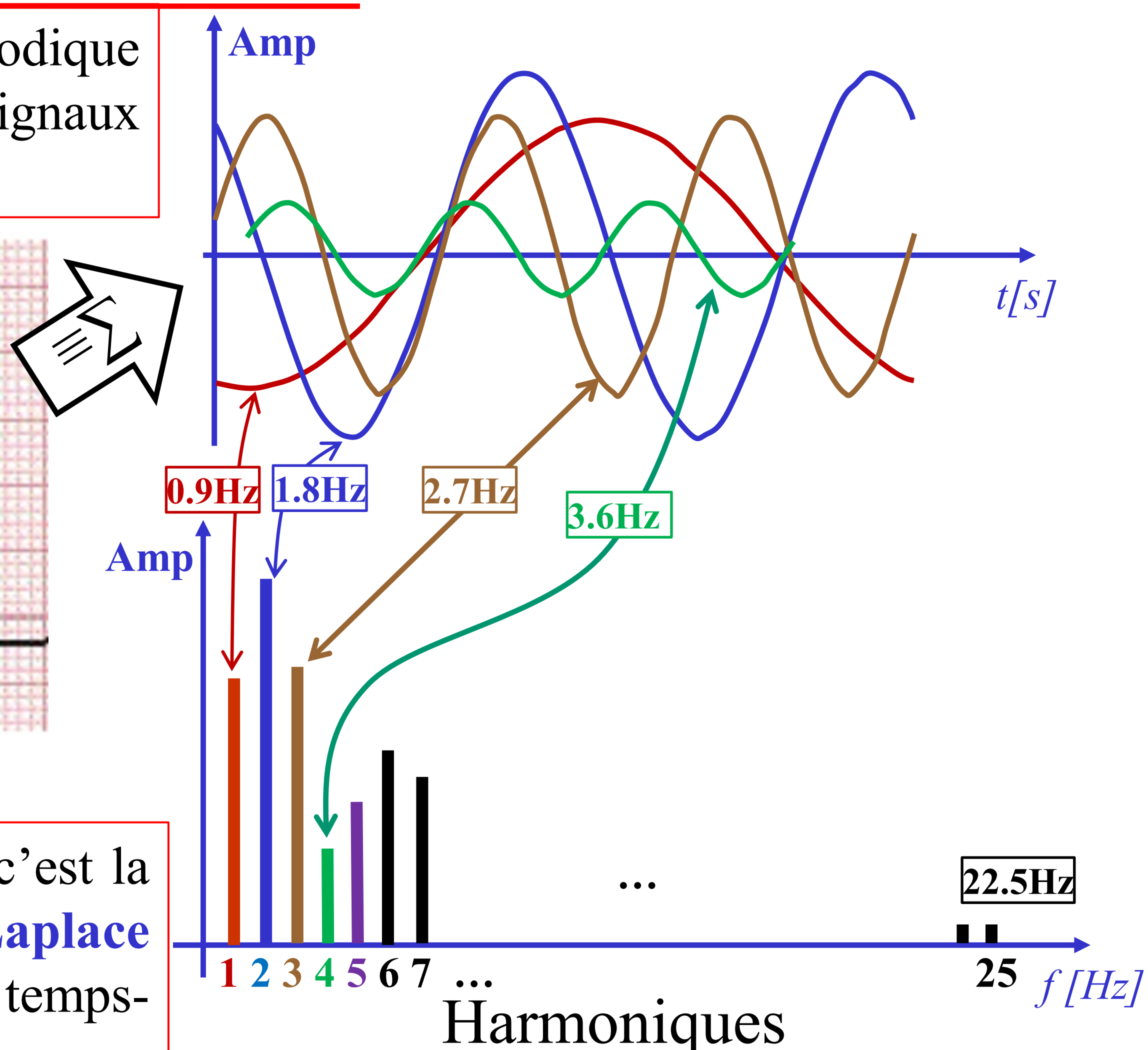

$S_t(t)$
t


$|S_t(jf)|$
f

Généralisation: signaux analogiques **quelconques**

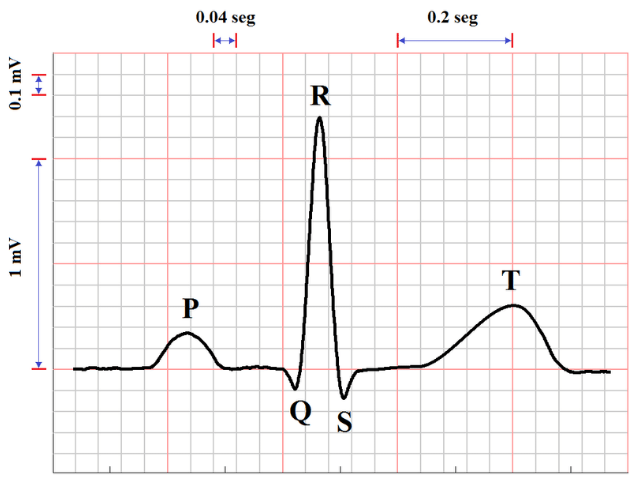
Série de Fourier: Tout signal périodique est décomposable en signaux sinusoïdaux.

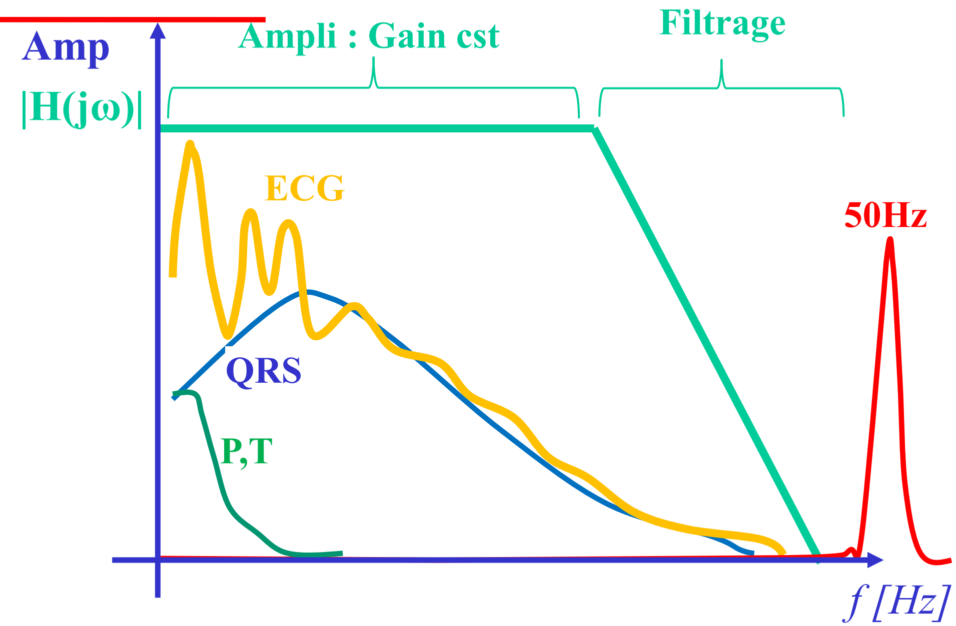


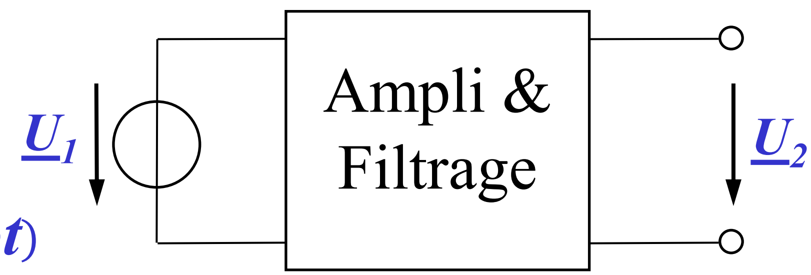


Si le signal n'est pas périodique c'est la **Transformée de Fourier ou Laplace** qui permet la conversion temps-fréquence.

Conditionnement analogique ≡ Amplification et filtrage







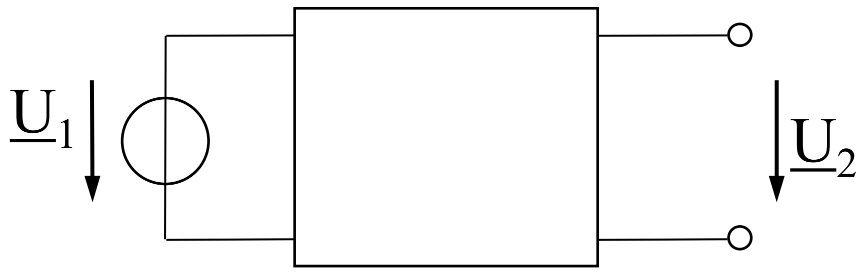
$$\underline{U}_1(t) = U_1 e^{j(\omega t)}$$

$$\underline{U}_2(t) = U_2 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Fonction de transfert: $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$

Fonction de transfert en tension

$\underline{U}_1 = U_1 \cdot e^{j\varphi_1}$



$\underline{U}_2 = U_2 \cdot e^{j\varphi_2}$

Fonction de transfert en tension:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$$ (également gain d'un ampli)

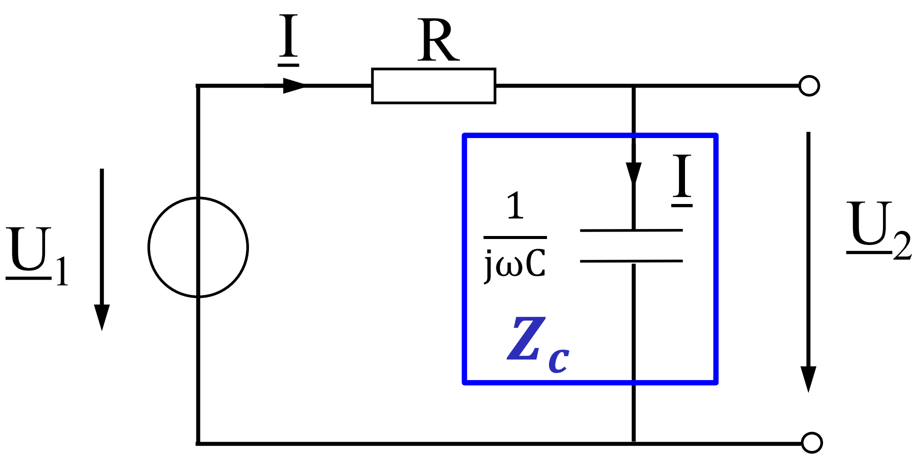
Module: $\frac{U_2}{U_1} = |\underline{H}(j\omega)|$

Phase: $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \mathrm{Arg}\left(\underline{H}(j\omega)\right)$

Souvent définie à sortie ouverte

Peut être différente si la sortie est chargée !

Exemple de Fonction de transfert en tension



Fonction de transfert:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{Z_c}{R + Z_c}$$

$$= \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Si $U_1(t) = \mathrm{Re}(\underline{U}_1) = U_1\cos(\omega t) \Rightarrow$

$$U_2(t) = \underbrace{|\underline{H}(j\omega)|}\, U_1 \cos\left(\omega t + \underbrace{\mathrm{Arg}\,(\underline{H}(j\omega))}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\, U_1 \cos(\omega t - \mathrm{arctg}(\omega RC))$$

Question: Comment varie le Module (gain) et la phase en fonction de la fréquence?

Méthode asymptotique → Diagramme de Bode

Diagramme de Bode en amplitude

Diagramme de Bode en amplitude

Définition: **Diagramme de Bode** est une technique permettant une **représentation graphique** simple et rapide du **comportement fréquentiel asymptotique** d'un système c.à.d. de sa fonction de transfert.

Pour cela on suit les étapes suivantes:

1. **Evaluer $\underline{H}(j\omega)$ du circuit**
2. **Ecrire $\underline{H}(j\omega)$ sous sa forme canonique**
3. **Expression de $|\underline{H}(j\omega)|$ en décibels (dB): $|\underline{H}(j\omega)|_{dB}$.**
4. **Tracer ses asymptotes $|\underline{H}(j\omega)|_{dB}$ en fct de $Log(\omega)$**
   - **C.à.d. la pulsation (resp. fréquence) est représentée sur une échelle logarithmique.**

Pourquoi le décibel ($\left|\underline{\mathbf{H}}(j\omega)\right|_{dB}$) ?

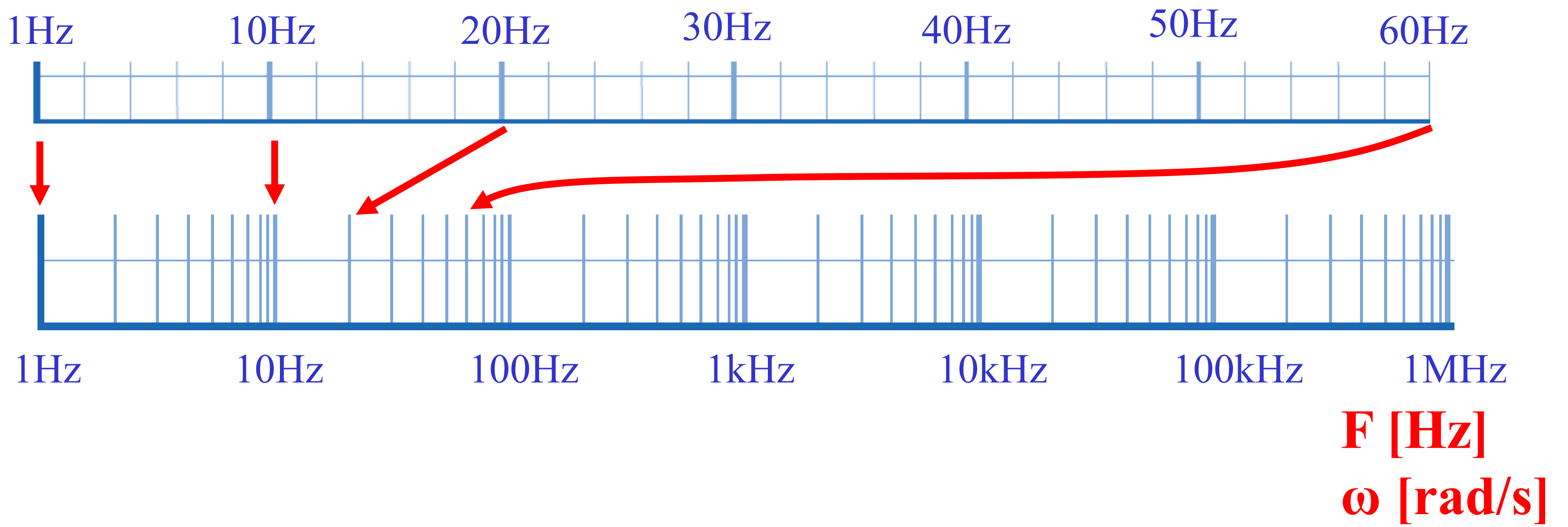
$$\left|\underline{\mathbf{H}}(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left|\underline{\mathbf{H}}(j\omega)\right| = 20\log\left|\frac{\underline{\mathbf{U}}_2}{\underline{\mathbf{U}}_1}\right|$$

$\left|\underline{H}(j\omega)\right| = 1000$		$\left|\underline{H}(j\omega)\right|_{dB} = 60$ dB
$\left|\underline{H}(j\omega)\right| = 100$	Amplification	$\left|\underline{H}(j\omega)\right|_{dB} = 40$ dB
$\left|\underline{H}(j\omega)\right| = 10$	$\left|\underline{U}_2\right| \geq \left|\underline{U}1\right|$	$\left|\underline{H}(j\omega)\right|_{dB} = 20$ dB
$\left|\underline{H}(j\omega)\right| = 1$		$\left|\underline{H}(j\omega)\right|_{dB} = 0$ dB
$\left|\underline{H}(j\omega)\right| = 0.1$		$\left|\underline{H}(j\omega)\right|_{dB} = -20$ dB
$\left|\underline{H}(j\omega)\right| = 0.01$	Atténuation $\left|\underline{U}_2\right| \leq \left|\underline{U}1\right|$	$\left|\underline{H}(j\omega)\right|_{dB} = -40$ dB
$\left|\underline{H}(j\omega)\right| = 0.001$		$\left|\underline{H}(j\omega)\right|_{dB} = -60$ dB

x10^6 +120 dB

Avantage 1: réduire l’étendue de l’échelle

Pourquoi en fct de Log(ω) ?



Avantage: Comprimer une échelle tout en maintenant sa lisibilité

Autre avantage du décibel ($|\underline{H}(j\omega)|_{dB}$) ?

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \cdot \underline{H}_2(j\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$|\underline{H}(j\omega)|_{dB} = |\underline{H}_1(j\omega)|_{dB} + |\underline{H}_2(j\omega)|_{dB}$$

Avantage 2: faciliter le calcule et représentions graphique

(plus aisé d'additionner que de le multiplier deux graphes)

Fonction de transfert sous Forme Canonique

$$\underline{H}(j\omega) = K \frac{j\frac{\omega}{\omega_{zo}}\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{z1}}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{z2}}\right)\ldots\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{zk}}\right)}{j\frac{\omega}{\omega_{po}}\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{p2}}\right)\ldots\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{pl}}\right)}$$

K **est une constante.**

ω_{zi} **(i=0,k)** zéro de la fonction de transfert.

ω_{pi} **(i=0,l)** pôle de la fonction de transfert.

Forme canonique et diagramme de Bode

$$\underline{H}(j\omega) = K \frac{j\frac{\omega}{\omega_{zo}}\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{z1}}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{z2}}\right)..\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{zk}}\right)}{j\frac{\omega}{\omega_{po}}\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{p2}}\right)...\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{pn}}\right)}$$

$$\left|\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{j}\boldsymbol{\omega})\right|_{dB} = \sum_{i}\left|\underline{\mathbf{H}}_{i}(\mathbf{j}\boldsymbol{\omega})\right|_{dB}$$

$$= |K|_{dB} + \left|j\frac{\omega}{\omega_{z0}}\right|_{dB} + \left|1 + j\frac{\omega}{\omega_{z1}}\right|_{dB} + \ldots + \left|1 + j\frac{\omega}{\omega_{zk}}\right|_{dB}$$

$$+ \left|{}^{1}\!\Big/_{j\frac{\omega}{\omega_{po}}}\right|_{dB} + \left|{}^{1}\!\Big/_{1+j\frac{\omega}{\omega_{po}}}\right|_{dB} + \ldots + \left|{}^{1}\!\Big/_{1+j\frac{\omega}{\omega_{pn}}}\right|_{dB}$$

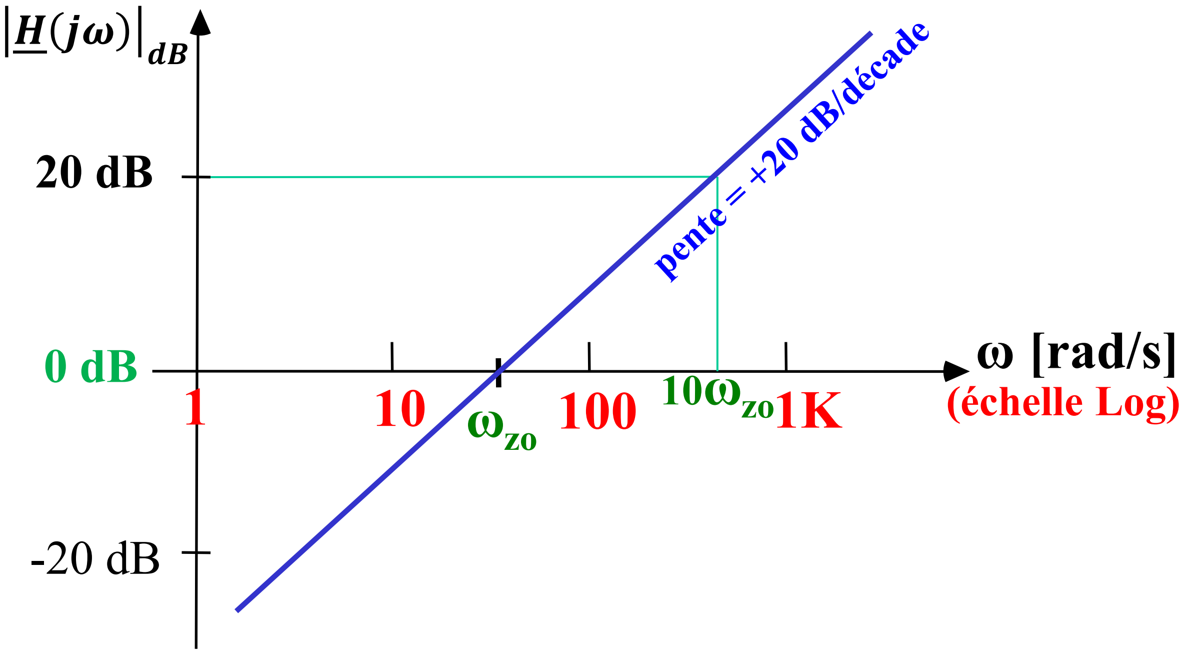
Conclusion: Si on connait le digramme de Bode des fonctions élémentaires $\left|\underline{\mathbf{H}}_{i}(\mathbf{j}\boldsymbol{\omega})\right|_{dB}$, nous pouvons en déduire celui de $\left|\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{j}\boldsymbol{\omega})\right|_{dB}$ par simple sommation.

fonctions élémentaires

$$\underline{H}(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_{zo}}$$

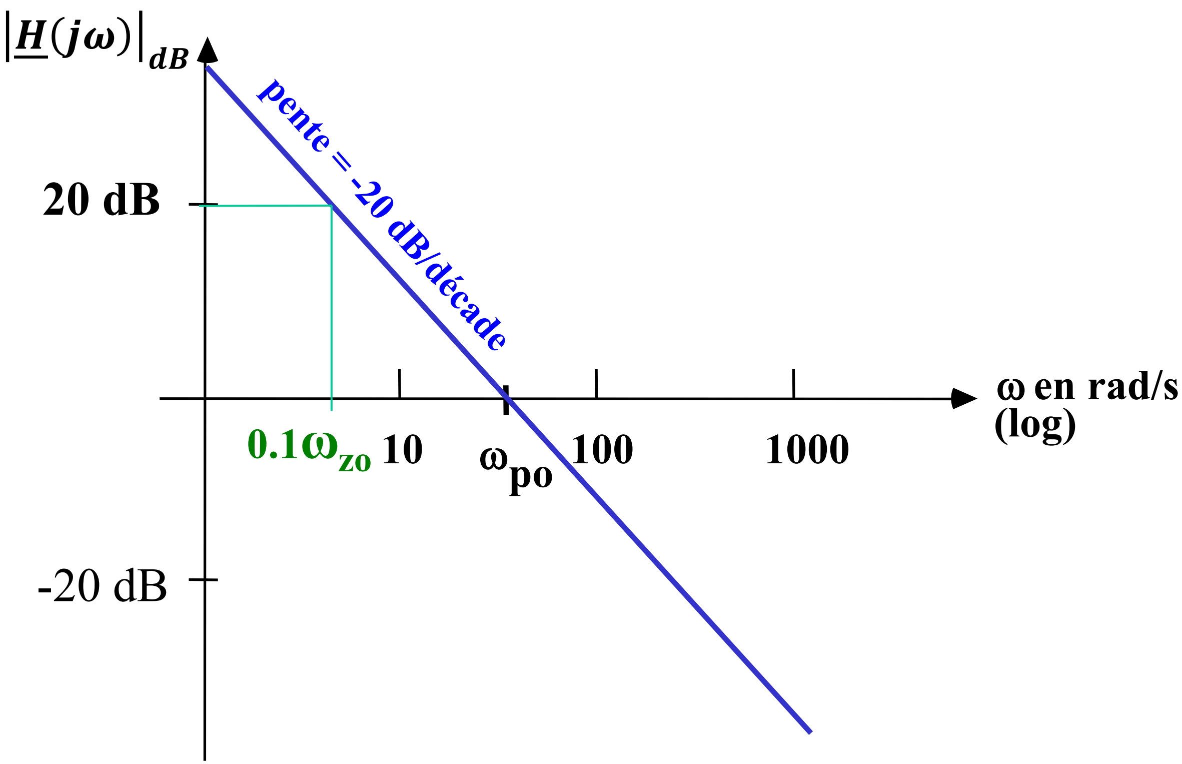
$$\left|\underline{H}(j\omega)\right|_{dB} = 20\,\mathrm{Log}\left(\frac{\omega}{\omega_{zo}}\right) = 20\,\mathrm{Log}(\omega) - 20\,\mathrm{Log}(\omega_{zo})$$

$$Y = 20\,X + C$$



$$\underline{H}(j\omega) = {}^{1}\!\Big/_{j\frac{\omega}{\omega_{po}}}$$

$$\left|\underline{H}(j\omega)\right|_{dB} = - \left|j\frac{\omega}{\omega_{P1}}\right|_{dB}$$ → **Symétrie / l'axe des x**



$$\underline{H}(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_{z1}}$$

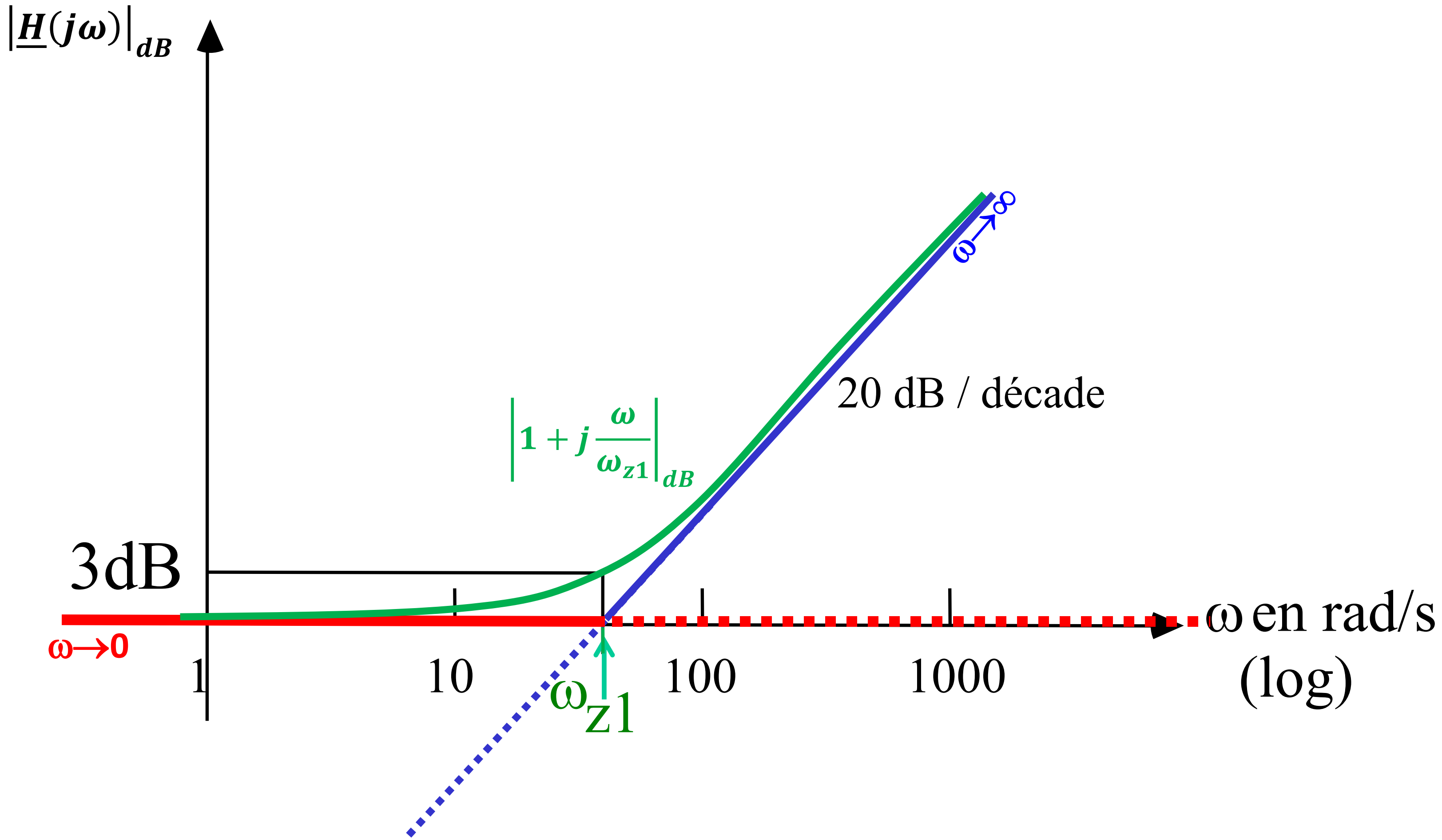
La fonction à tracer ⟹ $$\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{z1}}\right)^2}$$

Valeur particulière ($\omega = \omega_{z1}$) ⟹ $$\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \sqrt{2} = 3\ \mathrm{dB}$$

1ère asymptote HF, $\omega \to \infty$ ⟹ $$\lim_{\omega \to \infty} \underline{H}(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_{z1}} \quad \text{(Im)}$$

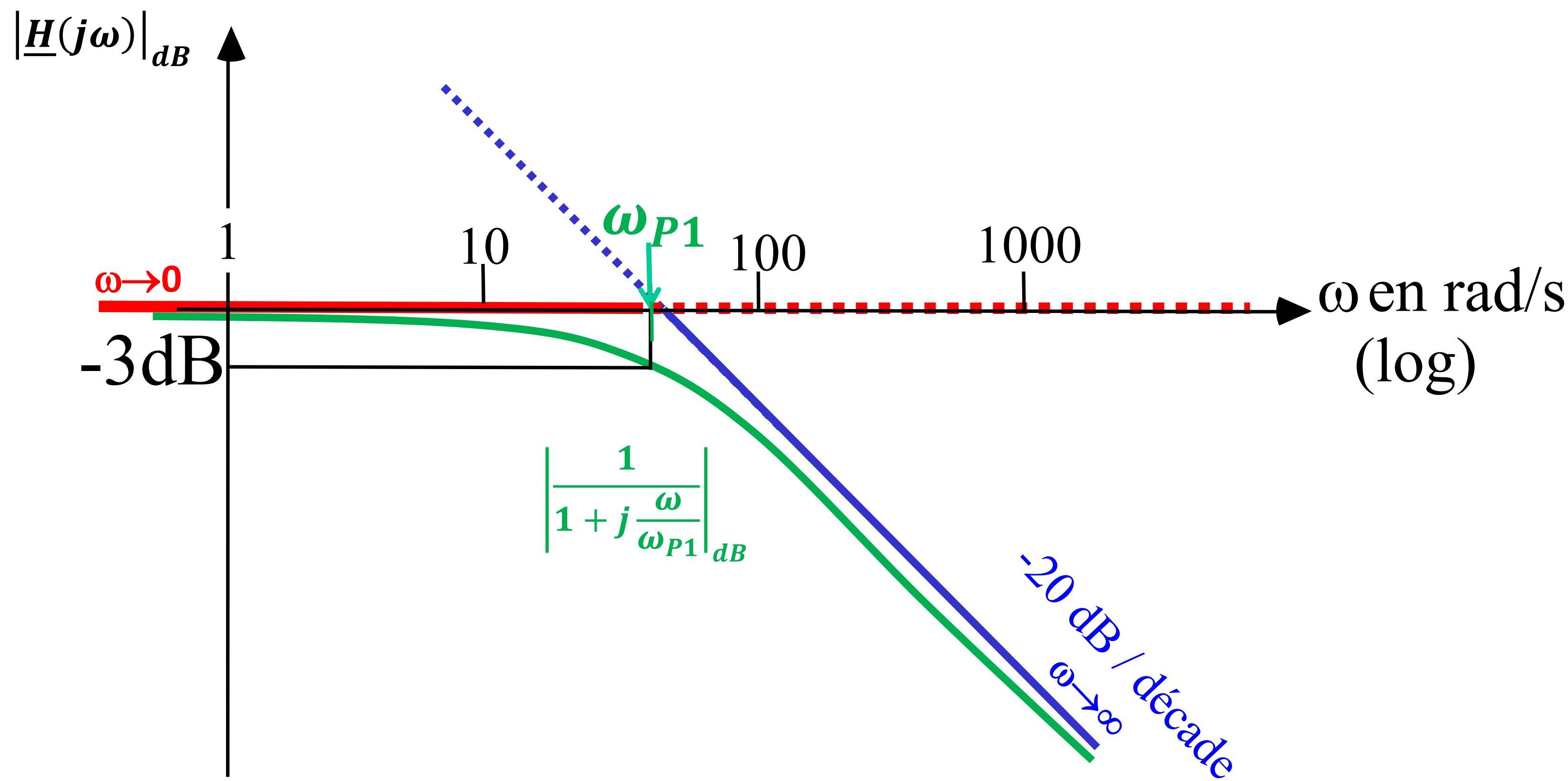
2ème asymptote DC, $\omega \to 0$ ⟹ $$\lim_{\omega \to 0} \underline{H}(j\omega) = 1 = 0\mathrm{dB} \quad \text{(Re)}$$

$$\underline{H}(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_{z1}}$$



$$\underline{H}(j\omega) = 1 \Big/ \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right)$$

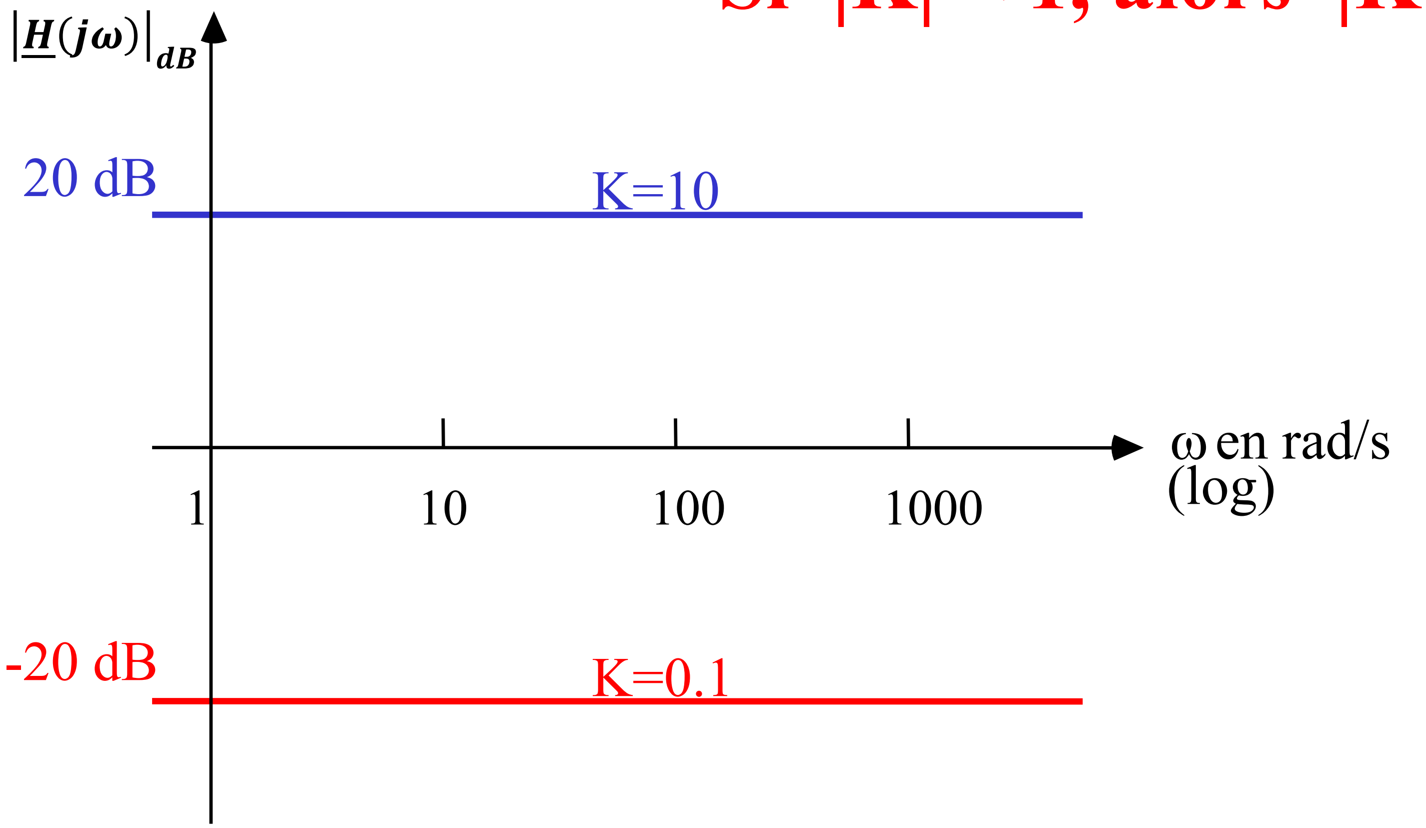
$$\left|\underline{H}(j\omega)\right|_{dB} = -\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_{P1}}\right|_{dB}$$ → **Symétrie / l'axe des x**



$\underline{H}(j\omega) = K = constante$

Si $|K| > 1$, alors $|K|_{dB} > 0$

Si $|K| < 1$, alors $|K|_{dB} < 0$

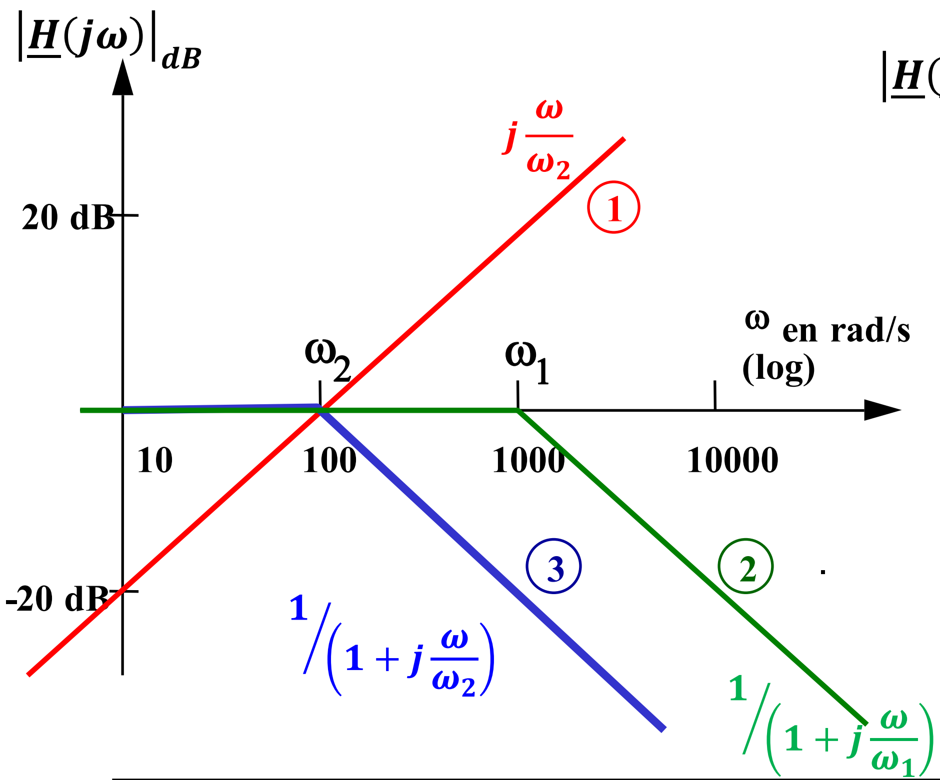


Exemple

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_2}}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

ω2 = 100 rad/s

ω1 = 1000 rad/s



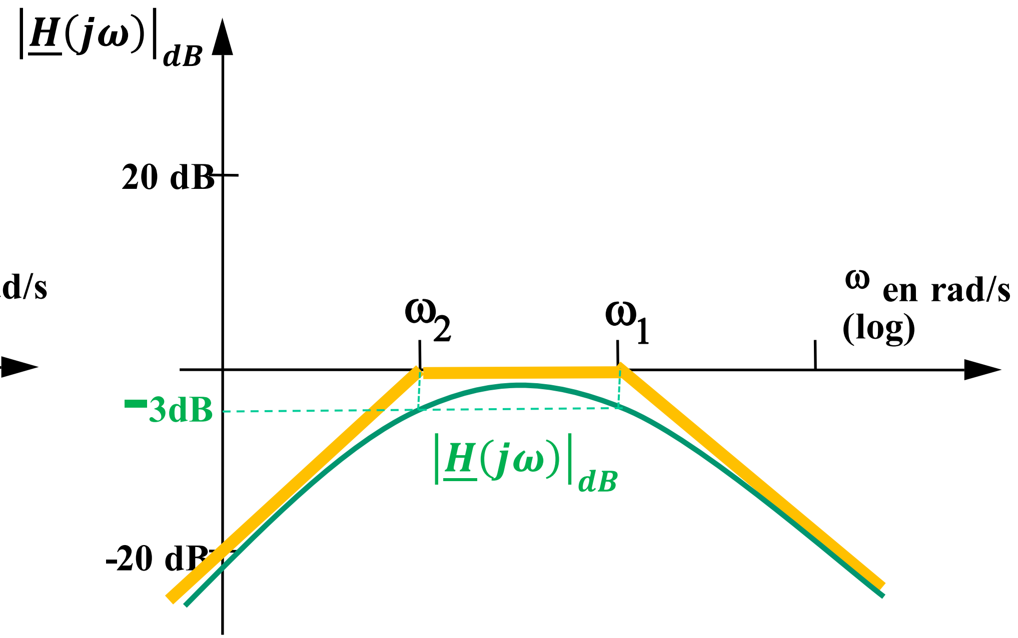


Diagramme de Bode en phase

Diagramme de Bode - argument ou phase

$$\underline{H}(j\omega) = K \frac{j\frac{\omega}{\omega_{zo}}\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{z1}}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{z2}}\right)..\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{zk}}\right)}{j\frac{\omega}{\omega_{po}}\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{p2}}\right)...\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{pn}}\right)}$$

$$Arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \sum_i Arg\left(\underline{H}_i(j\omega)\right)$$

$$= \mathrm{Arg}(K) + \mathrm{Arg}\left(j\frac{\omega}{\omega_{z0}}\right) + \mathrm{Arg}\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{z1}}\right) + \ldots + \mathrm{Arg}\left({}^{1}/_{j\frac{\omega}{\omega_{po}}}\right) + \mathrm{Arg}\left({}^{1}/_{1+j\frac{\omega}{\omega_{po}}}\right)\ldots$$

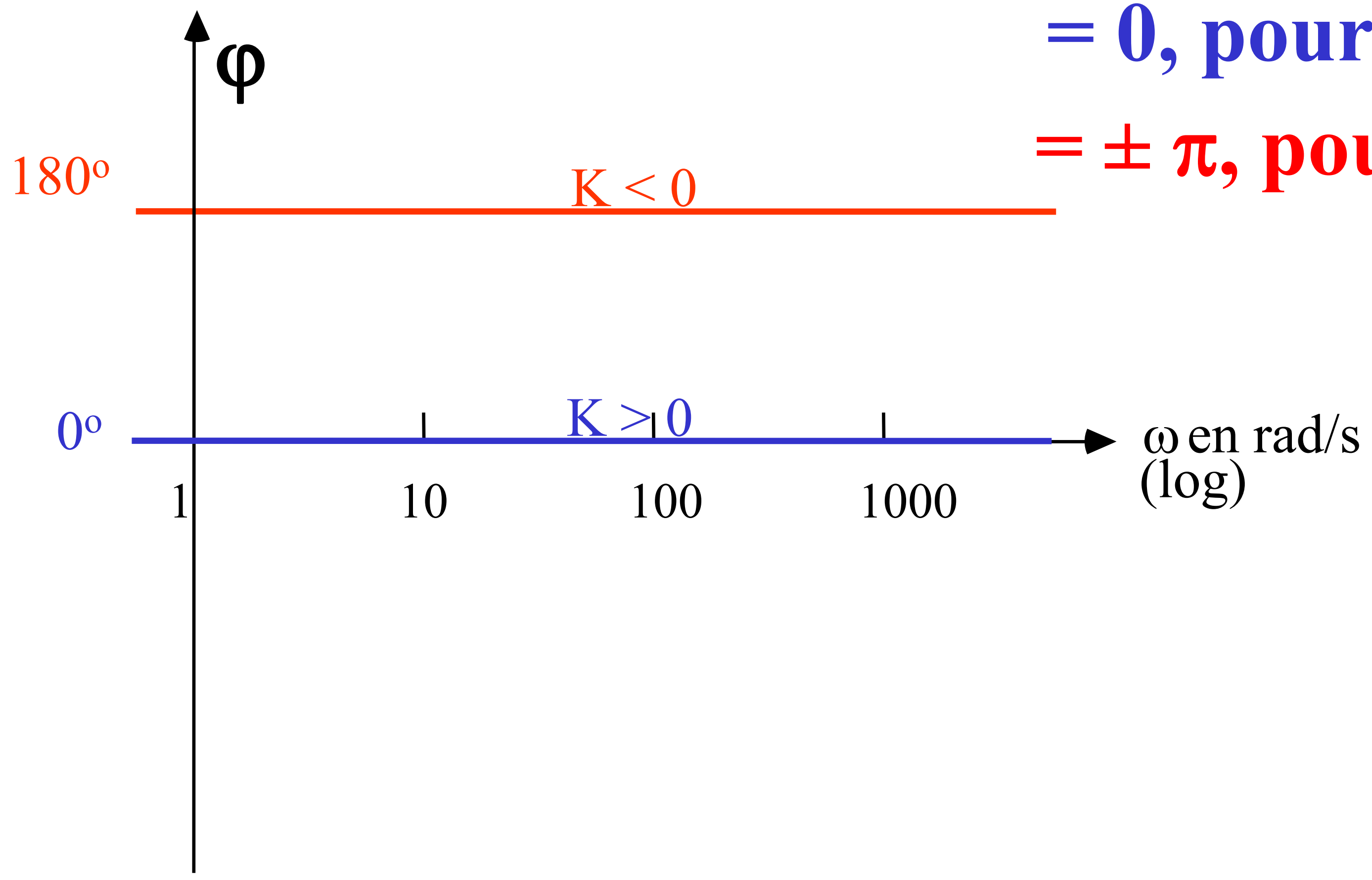
Conclusion: Si on connait le digramme de Bode des fonctions élémentaires $Arg\left(\underline{H}_i(j\omega)\right)$, nous pouvons en déduire celui de $Arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)$ par simple sommation.

$\underline{H}(j\omega) = K = constante$

Arg(K) =Arctg (Im/Re) = Arctg (0)

= 0, pour K > 0

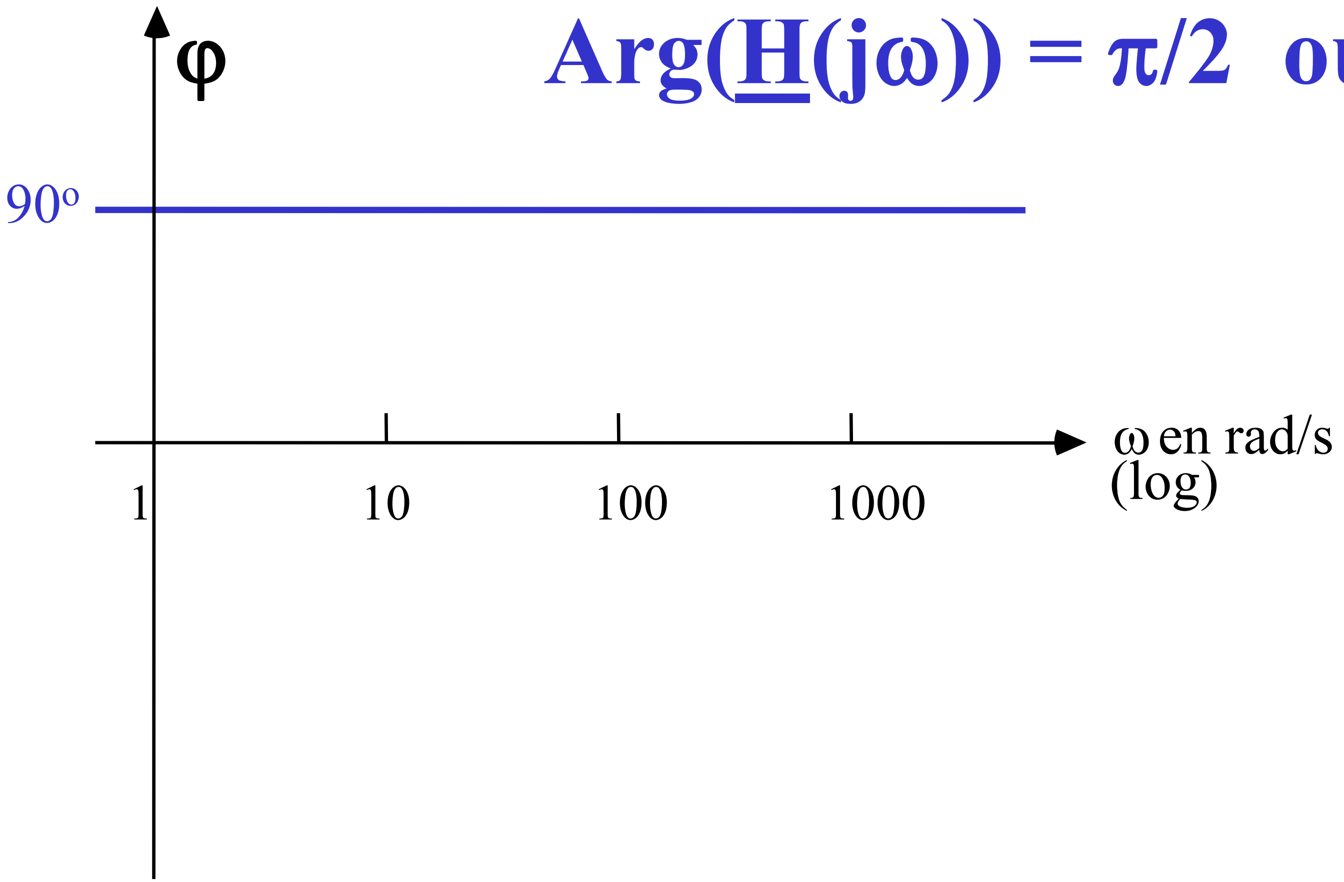
= ± π, pour K < 0



$$\underline{H}(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_{zo}}$$

Im/Re → +∞

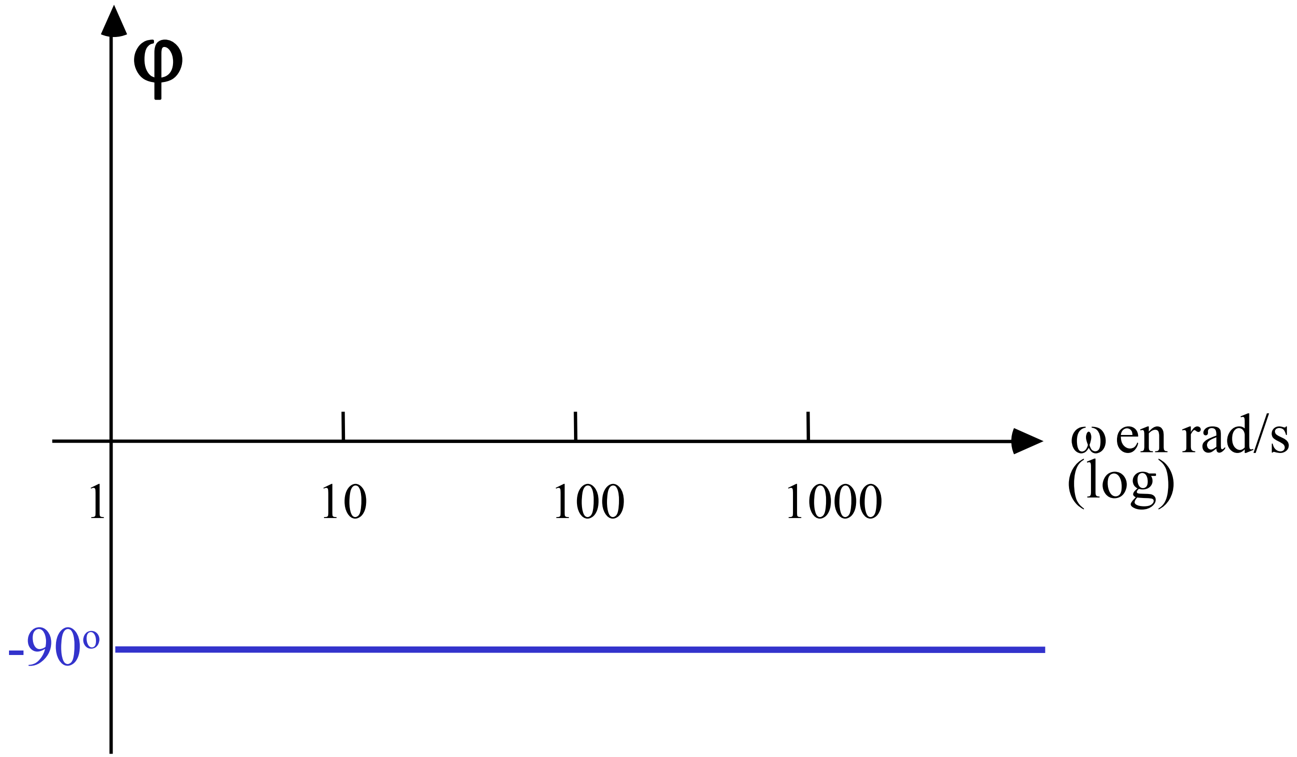
$Arg(\underline{H}(j\omega)) = \pi/2$ ou 90^o



$$\underline{H}(j\omega) = {}^{1}\Big/_{j\,\frac{\omega}{\omega_{po}}}$$

Im/Re → -∞

Arg($\underline{H}$(jω)) = -π/2 ou -90º



$$\underline{H}(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_{z1}}$$

$$\mathrm{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = \mathrm{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_{z1}}\right)$$

1ère asymptote
HF, $\omega \to \infty$ ⇒ $\lim_{\omega\to\infty} \underline{H}(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_{z1}}$ (Im , Arg = $\pi/2$)

2ème asymptote
DC, $\omega \to 0$ ⇒ $\lim_{\omega\to 0} \underline{H}(j\omega) = 1$ (Re, Arg = 0)

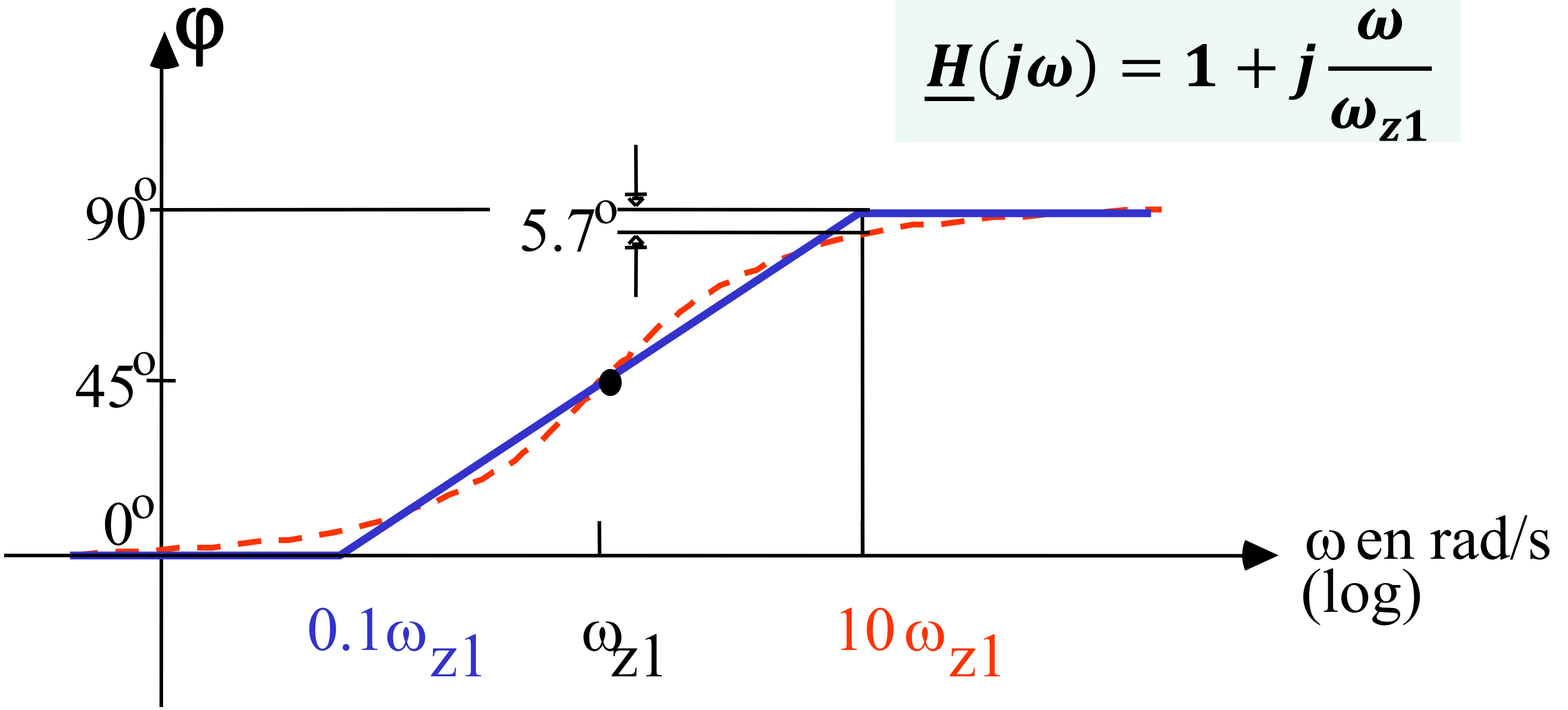
Valeur particulière

$(\omega = \omega_{z1})$ ⇒ **$\mathrm{Arg}(H(j\omega)) = \mathrm{Arctg}(1) = 45^o = \pi/4$**

Approximation autour de $\omega=\omega_{z1}$:

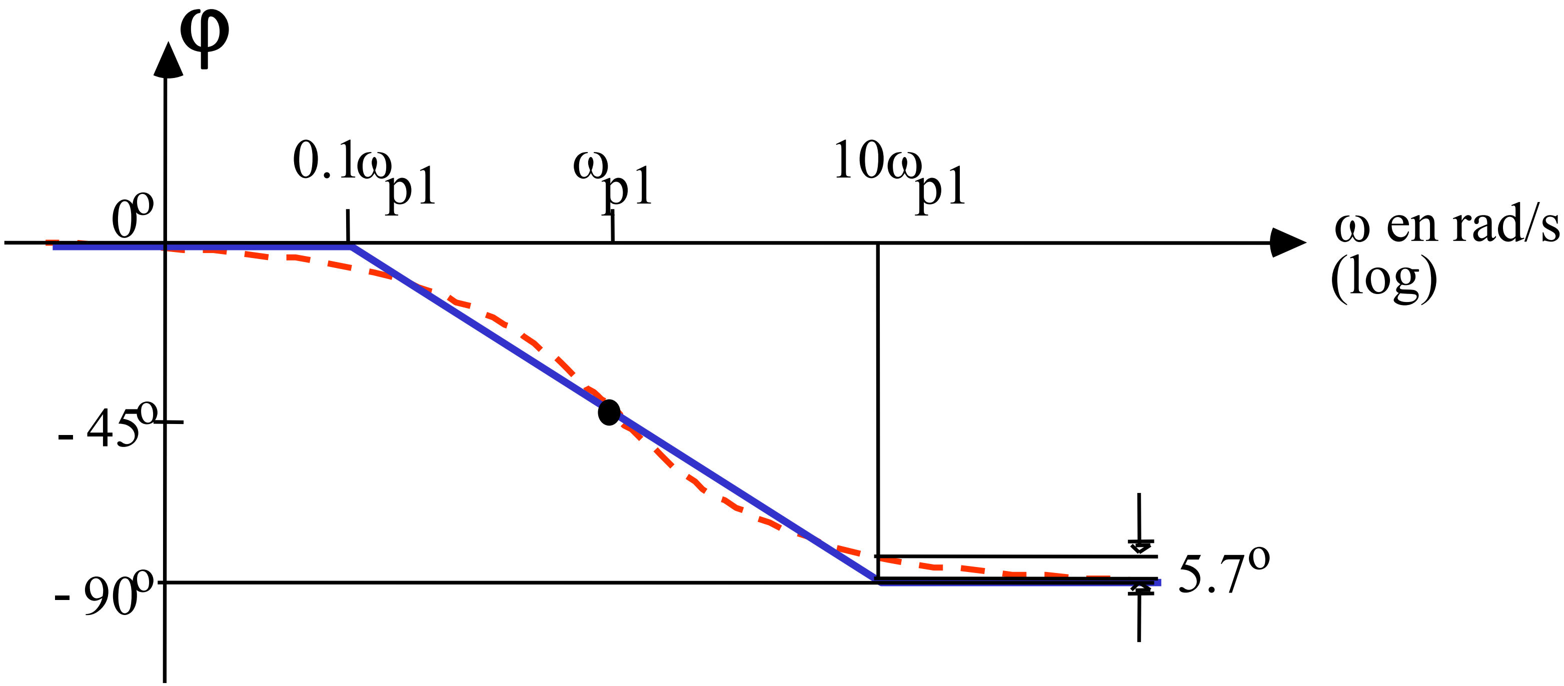
On approxime souvent le diagramme des phases par une droite partant d'un déphasage nul pour $\omega=0.1\omega_{z1}$ pour atteindre un déphasage de 90^{o} en $\omega=10\omega_{z1}$.

$$\underline{H}(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_{z1}}$$



$$\underline{H}(j\omega) = \mathbf{1} \Big/ \left(\mathbf{1} + j\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right)$$

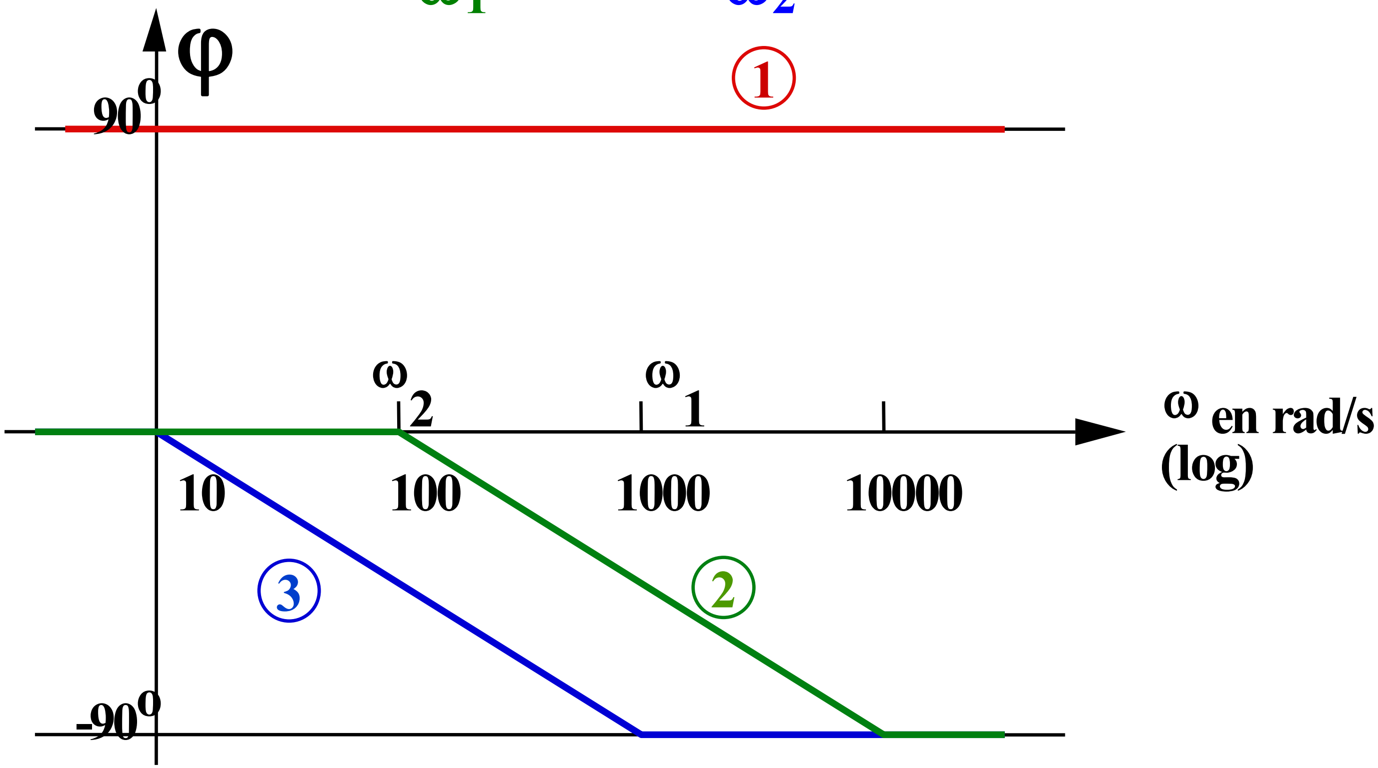
$$\mathbf{Arg}(\underline{\mathbf{H}}(j\omega)) = -\ \mathbf{Arg}\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right)$$ → **Symétrie / l'axe des x**

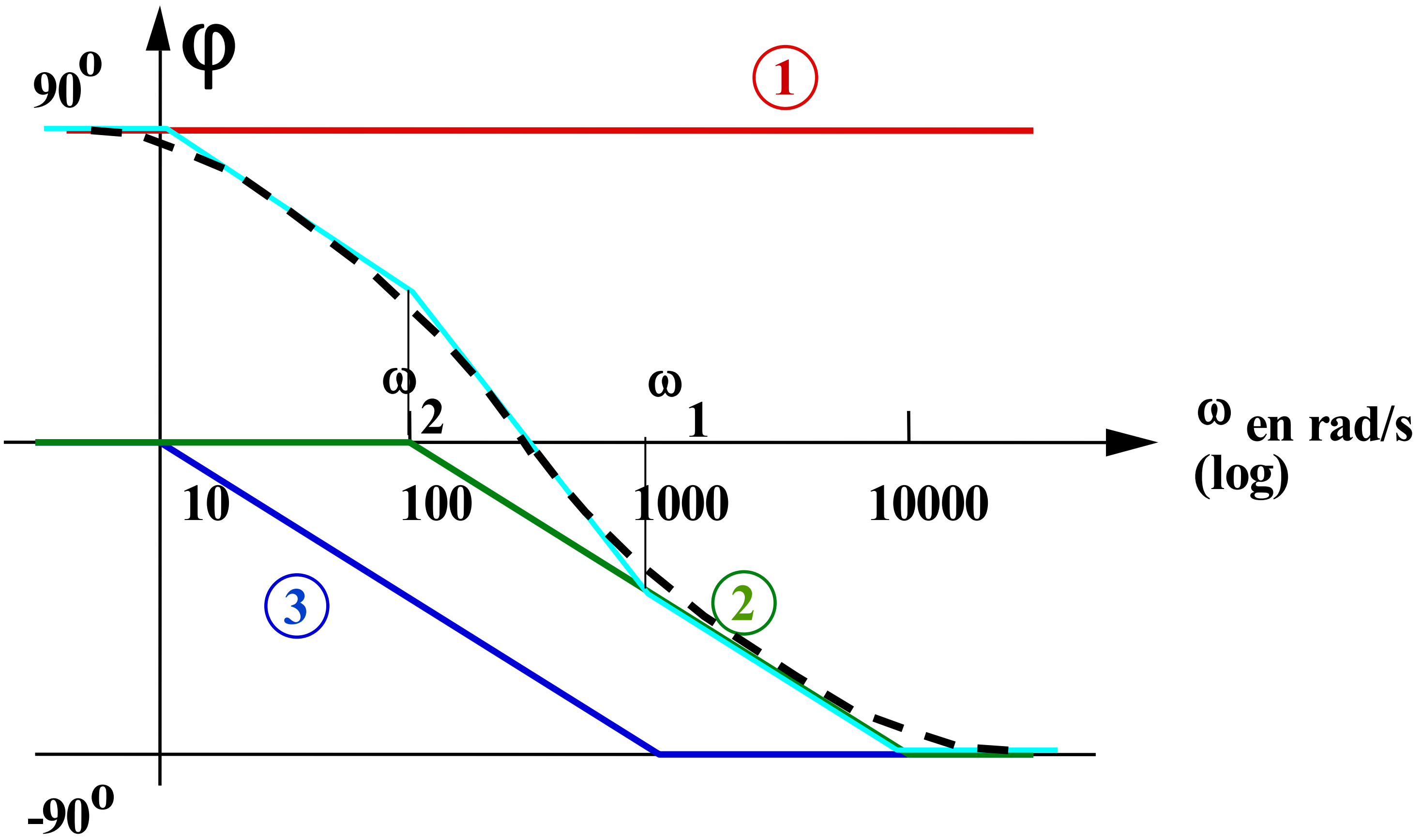


Exemple

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_2}}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

ω2 = 100 rad/s
ω1 = 1000 rad/s

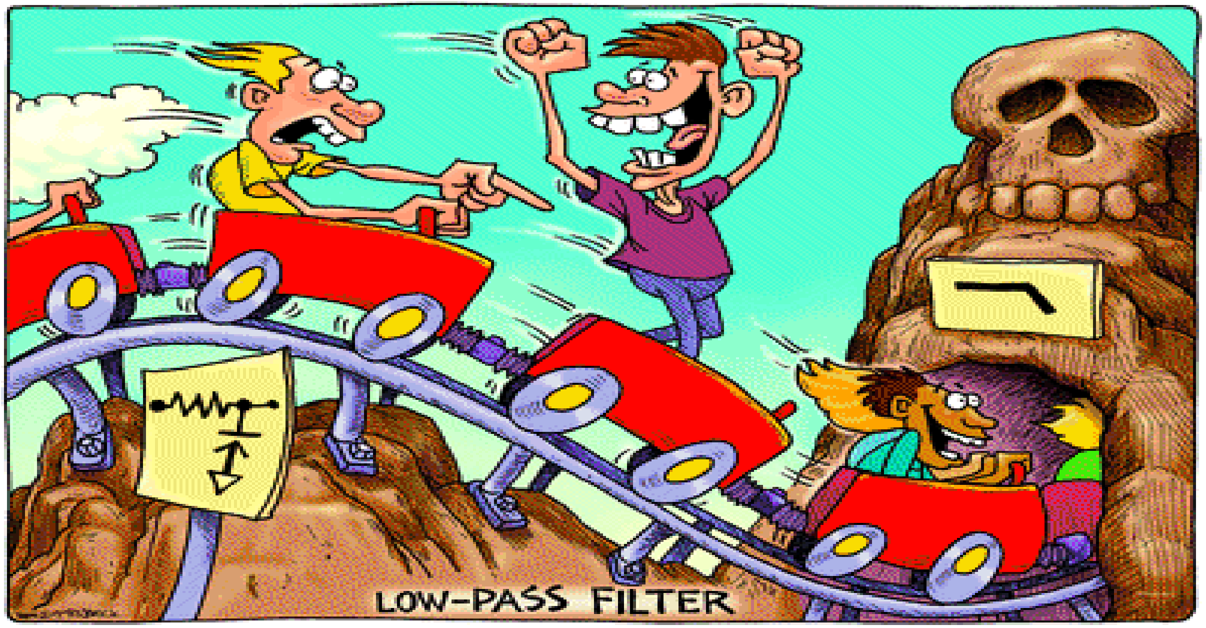




φ
90^0
1
ω
2
ω
1
ω en rad/s
(log)
10
100
1000
10000
3
2
-90^0

Circuits RC du premier ordre

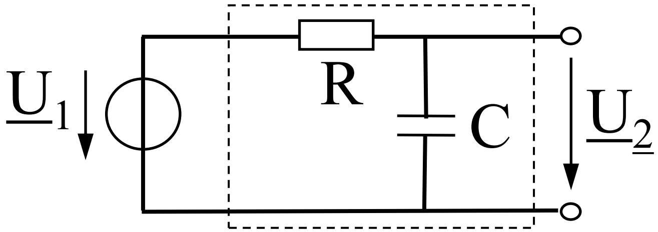
Circuits RC passe-bas du premier ordre



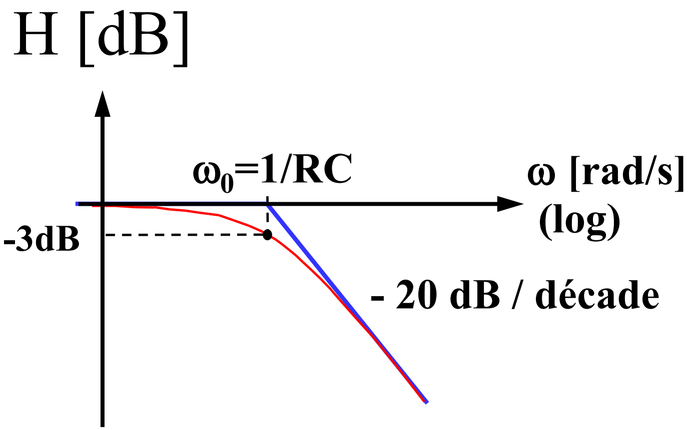
Déf: Un **filtre passe-bas** est un filtre qui laisse **passer les basses fréquences** et **atténue les hautes fréquences**, c'est-à-dire les fréquences supérieures à <u>la fréquence de coupure</u>.

EPFL

Réponse en fréquence d'un passe-bas



$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_0}}$$

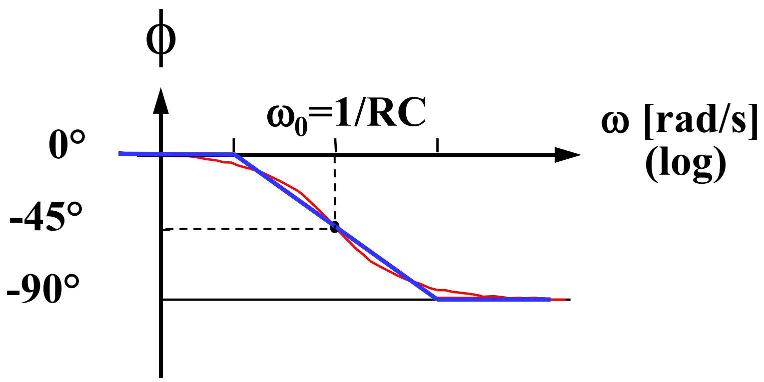


ω_o : pulsation de coupure:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

f_o : fréquence de coupure:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$$

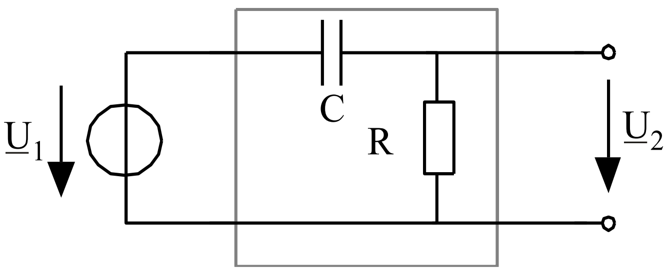


Circuits RC passe-haut du 1er ordre

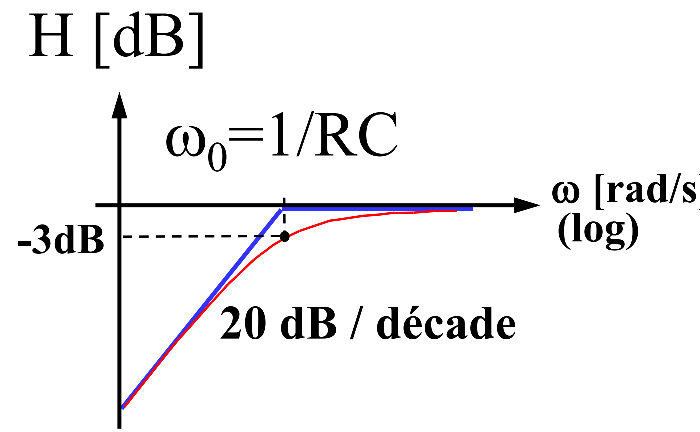
Déf: Un **filtre passe-haut** est un filtre qui laisse **passer les hautes fréquences** et **atténue les basses fréquences**, c'est-à-dire les fréquences inférieure à <u>la fréquence de coupure</u>.

EPFL

Réponse en fréquence d'un passe-haut



$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+\frac{j\omega}{\omega_0}}$$



ω_o : pulsation de coupure:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

f_o : fréquence de coupure:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$$